1.1 Kompleksarvud

Ül 1.1. Leida võrrandi reaalarvulised lahendid $x, y \in \mathbb{R}$ kui:

1) $(1+2i)x + (3-5i)y = 1-3i$

2) $(4+2i)x + (5-3i)y = 13+i$

Ül 1.2. Esitada algebralisel kujul kompleksarvud:

1) $(1-i)^3 - (1+i)^3$

2) $\dfrac{3+2i}{-1-2i}$

3) $\dfrac{1}{1+4i} + \dfrac{1}{4-i}$

4) $\dfrac{(1+i)(3+i)}{3-i}$

5) $\sqrt{3-4i}$

Ül 1.3. Leida järgmiste ruutvõrrandiste kompleksarvulised lahendid:

1) $z^2 - 2z + 2 = 0$

2) $z^2 - (2+i)z + (-1+7i) = 0$

Ül 1.4. Selgitada, millise joone esitab komplekstasandil võrrand

$$\mathrm{Re}\frac{z-3}{z+3} = 0.$$

Teha joonis.

Ül 1.5. Kujutada komplekstasandil piirkond, mis on määratud võrratustega

$$\mathrm{Re}(z) \leqslant 1 \quad \text{ja} \quad |z-2| \leqslant 2.$$

Ül 1.6. Kasutades argumendi peaväärtust, esitada trigonomeetrilisel kujul järgmised kompleksarvud:

1) $(-\sqrt{27} - 3i)^{30}$

2) $\left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{40}$

3) $\dfrac{(-1 + i)^{20}}{(2\sqrt{3} - 2i)^{10}}$

Ül 1.7. Kujutuada komplekstasandil piirkond, mis on määratud võrratustega

1) $1 < |z| < 3, \quad \mathrm{Re}(z) < 2, \quad -\dfrac{\pi}{4} < \arg(z) \leqslant \dfrac{\pi}{2},$

2) $-\dfrac{\pi}{4} \leqslant \arg(z - 2 - i) \leqslant \dfrac{\pi}{4}.$

Ül 1.8. Esitada trigonomeetrilisel kujul kompleksarvud:

1) $z = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha, \quad 0 < \alpha < \pi,$

2) $z = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha, \quad \pi < \alpha < 2\pi,$

3) $z = 1 - \sin\alpha + i\cos\alpha, \quad 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

Ül 1.9. Skitseerida komplekstasandil joon, mille kujundab punkt z^2, kui kompleksarv z liigub mööda ruudu külgi, mille tipud asuvad punktides $-1-i$, $2 - i$, $2 + 2i$ ja $-1 + 2i$.

Ül 1.10. Arvutada ja kujutada leitud juured graafiliselt.

1) $\sqrt[3]{2 - 2\sqrt{3}i}$,

2) $\sqrt[6]{-4 + 4\sqrt{3}i}$.

Ül 1.11. Kujutada komplekstasandil joon, mille punktid rahuldavad võrrandit:

1) $|z - 1 - yi|^2 = -\mathrm{Im}(z)$,

2) $|z - i| + |z + i| = 4$,

3) $|z - 1 - iy| = -\mathrm{Im}(z)$,

kus $z = x + iy$.

Ül 1.12. Kasutades kompleksarve, avaldada järgmised trigonomeetrilised funktsioonid $\sin x$ ja $\cos x$ kaudu

1) $\cos 4x$ ja $\sin 4x$;

2) $\cos 5x$ ja $\sin 5x$;

3) $\cos 3x$ ja $\sin 3x$.