1.5 Lineaarne võrrandisüsteem

Ül 1.10. Leida lineaarse võrrandisüsteemi üldlahend, kui

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + \ x_3 - \ 3x_4 + \ x_5 = 13, \\ x_1 - \ x_2 + 2x_3 + \ x_4 + \ x_5 = \ 9, \\ 4x_1 + 8x_2 - \ x_3 - 11x_4 + \ x_5 = 21, \\ 3x_1 + \ x_2 - 2x_3 + \ 3x_4 + 2x_5 = 12. \end{cases}$$

Kirjutame välja võrrandisüsteemi süsteemimaatriksi ja laiendatud maatriksi ning vahetame ära selle esimese ja teise rea.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 2 & 1 & -3 & 1 & 13 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 9 \\ 4 & 8 & -1 & -11 & 1 & 21 \\ 3 & 1 & -2 & 3 & 2 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & -3 & 1 & 13 \\ 4 & 8 & -1 & -11 & 1 & 21 \\ 3 & 1 & -2 & 3 & 2 & 12 \end{array}\right) \sim$$

Teisendame esimesse veergu maksimaalset nulle

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 4 & -3 & -5 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & -3 & -5 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & -8 & 0 & -1 & -15 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II - 2I \\ III - 2II \\ IV - 3I \end{array} \sim$$

Nüüd teisendame teise veeru elemendid nullideks

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 4 & -3 & -5 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 0 & -10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III - II \\ IV - II \end{array} \sim$$

Jätame ära nullideks teisendatud rea ja valime põhimuutujad. Need tuleb valida nii, et vastavatest veeruelemntidest moodustatud determinant ei ole null. Antud juhul sobivad põhimuutujateks näiteks x_1, x_3 ja x_5.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & & x_3 & & x_5 & & \end{array} \\ \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 4 & -3 & -5 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-\frac{1}{5})III \end{array} \sim \end{array}$$

Teisendame põhimuutujatele vastavad veerud ühikmaatriksi veergudeks

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc|c} x_1 & & x_3 & & x_5 & \\ \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & -8 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} I-2III \\ II+3III \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc|c} x_1 & & x_3 & & x_5 & \\ \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & -5 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & -8 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} I+II \\ \\ \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc|c} x_1 & & x_3 & & x_5 & \\ \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & -5 & 0 & 6 \\ 0 & -4 & 0 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \cdot(-1)II \\ \end{array}$$

Ühikmaatriksi veerud tekitavad sellise olukorra, et maatriksi igasse ritta (võrrandisse) jääb ainult üks põhimuutuja. Võrrandisüsteemi lahendi väljakirjutamiseks avaldame igast võrrandist, so maatriksi reast, põhimuutuja. Ülejäänud muutujad nimetatakse vabadeks muutujateks. Antud juhul on nendeks $x_2 = c_1$ ja $x_4 = c_2$.

$$\begin{cases} x_1 = 6 - 3x_2 + 5x_4, \\ x_3 = 2 + x_4, \\ x_5 = -1 + 2x_2 - 8x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 - 3c_1 + 5c_2, \\ x_2 = c_1, \\ x_3 = 2 + c_2, \\ x_4 = c_2, \\ x_5 = -1 + 2c_1 - 8c_2, \end{cases}$$

kus parameetrid c_1 ja c_2 omandavad sõltumatult reaalarvulisi väärtusi. Viimase lahendi võime esitada maatrikskujul

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}.$$