Sarnased maatriksid, maatrikiste diagonaliseerimine.

Mati Väljas

mati.valjas@ttu.ee
www.staff.ttu.ee/∼mvaljas
Tallinna Tehnikaülikool

December 16, 2013

Sarnased maatriksid

Definitsioon

Öeldakse, et ruutmaartriks A on ***sarnane*** sama järku ruutmaatriksiga B, kui leidub niisugune regulaarmaatriks P, et

$$B = P^{-1}AP.$$

Definitsioon

Ruutmaartriksit A nimetatakse ***diagonaliseeritavaks***, kui maatriks A on sarnane mõne diagonaalmaatriksiga D, so

$$D = P^{-1}AP.$$

Sarnased maatriksid

Definitsioon

Öeldakse, et ruutmaartriks A on ***sarnane*** sama järku ruutmaatriksiga B, kui leidub niisugune regulaarmaatriks P, et

$$B = P^{-1}AP.$$

Definitsioon

Ruutmaartriksit A nimetatakse ***diagonaliseeritavaks***, kui maatriks A on sarnane mõne diagonaalmaatriksiga D, so

$$D = P^{-1}AP.$$

Lause

Olgu A $n-$järku ruutmaatriks, siis järgmised tingimused on ekvivalentsed:

a) Maatriks A on diagonaliseeritav.

b) Maatriksil A on $n-$lineaarselt sõltumatut omavektorit.

Tõestus.
a) $\Rightarrow$ b), so eeldame, et maatriks A on diagonaliseeritav. Järelikult leidub regulaarmaatriks P, nii, et

$$D = P^{-1}AP \qquad \Rightarrow \qquad PD = AP.$$

Tähistame maatriksi P veeruvektoreid vastavalt $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$.

$$AP = A\begin{pmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \ldots & \vec{p}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\vec{p}_1 & A\vec{p}_2 & \ldots & A\vec{p}_n \end{pmatrix}$$

$$PD = \begin{pmatrix} \lambda_1\vec{p}_1 & \lambda_2\vec{p}_2 & \ldots & \lambda_n\vec{p}_n \end{pmatrix}$$

Võrdusest $AP = PD$ järeldub, et

$$A\vec{p}_1 = \lambda_1\vec{p}_1, \;\; A\vec{p}_2 = \lambda_2\vec{p}_2, \;\; \ldots, \;\; A\vec{p}_n = \lambda_n\vec{p}_n.$$

Kuna maatriks P on regulaarne, siis selle veeruvektorid $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$ on lineaarselt sõltumatud ja need vektorid on maatriksi A omavektorid.

Seega a) $\Rightarrow$ b) on tõestatud.

Tõestame b) $\Rightarrow$ a).
Olgu maatriksil A $n-$ lineaarselt sõltumatut omavektorit $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$, mis vastavad omaväärtustele $\lambda_1, \ \lambda_2, \ \ldots, \ \lambda_n$.

Moodustame maatriksi

$$P = \begin{pmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \dots & \vec{p}_n \end{pmatrix}$$

ja diagonaalmaatriksi

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Arvutame

$$AP = A \begin{pmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \dots & \vec{p}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\vec{p}_1 & A\vec{p}_2 & \dots & A\vec{p}_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1\vec{p}_1 & \lambda_2\vec{p}_2 & \dots & \lambda_n\vec{p}_n \end{pmatrix} = PD.$$

Kuna maatriksi P veeruvektorid on lineaarselt sõltumatud, siis $det(P) \neq 0$ ja maatriksil P eksisteerib pöördmaatriks P^{-1}.

Siis võrdusest $AP = PD$ saame, et $D = P^{-1}AP$, so maatriks A on sarnane diagonaalmaatriksiga D ehk diagonaliseeritav.

Seega b) $\Rightarrow$ a) on tõestatud.

Tõestatud lausest järeldub, et maatriks A on diagonaliseeritav parajasti siis, kui maatriksi omaväärtuste algebralised ja geomeetrilised kordsused on võrdsed.

Kuna maatriksi P veeruvektorid on lineaarselt sõltumatud, siis $det(P) \neq 0$ ja maatriksil P eksisteerib pöördmaatriks P^{-1}.

Siis võrdusest $AP = PD$ saame, et $D = P^{-1}AP$, so maatriks A on sarnane diagonaalmaatriksiga D ehk diagonaliseeritav.

Seega b) $\Rightarrow$ a) on tõestatud.

Tõestatud lausest järeldub, et maatriks A on diagonaliseeritav parajasti siis, kui maatriksi omaväärtuste algebralised ja geomeetrilised kordsused on võrdsed.

Kuna maatriksi P veeruvektorid on lineaarselt sõltumatud, siis $det(P) \neq 0$ ja maatriksil P eksisteerib pöördmaatriks P^{-1}.

Siis võrdusest $AP = PD$ saame, et $D = P^{-1}AP$, so maatriks A on sarnane diagonaalmaatriksiga D ehk diagonaliseeritav.

Seega b) $\Rightarrow$ a) on tõestatud.

Tõestatud lausest järeldub, et maatriks A on diagonaliseeritav parajasti siis, kui maatriksi omaväärtuste algebralised ja geomeetrilised kordsused on võrdsed.

Kuna maatriksi P veeruvektorid on lineaarselt sõltumatud, siis $det(P) \neq 0$ ja maatriksil P eksisteerib pöördmaatriks P^{-1}.

Siis võrdusest $AP = PD$ saame, et $D = P^{-1}AP$, so maatriks A on sarnane diagonaalmaatriksiga D ehk diagonaliseeritav.

Seega b) $\Rightarrow$ a) on tõestatud.

Tõestatud lausest järeldub, et maatriks A on diagonaliseeritav parajasti siis, kui maatriksi omaväärtuste algebralised ja geomeetrilised kordsused on võrdsed.

Viimase lause tõestus annb võimaluse maatriksi P konstrueerimiseks.

Näide

Leida maatriks P, mis teisendab maatriksi A diagonaalkujule, kui

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -19 & 13 \\ 3 & -9 & 5 \\ 3 & -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lahendus. Eelnevalt teame, et selle maatriksi omaväärtused ja nendele vastavad omavektorid on:

$$\lambda_1 = -1 \Rightarrow \vec{p_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -2 \Rightarrow \vec{p_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_3 = 2 \Rightarrow \vec{p_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Leiame maatriksi P pöördmaatriksi

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Arvutame

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -19 & 13 \\ 3 & -9 & 5 \\ 3 & -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Leiame maatriksi P pöördmaatriksi

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Arvutame

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -19 & 13 \\ 3 & -9 & 5 \\ 3 & -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$P^{-1}AP = D \quad \Rightarrow A = PDP^{-1}.$$

Diagonaalmaatriksi korral

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PDEDP^{-1} = PD^2P^{-1}.$

Matemaatilise induktsiooniga saab tõestada, et

$$A^k = PD^kP^{-1}.$$

$$P^{-1}AP = D \quad \Rightarrow A = PDP^{-1}.$$

Diagonaalmaatriksi korral

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PDEDP^{-1} = PD^2P^{-1}.$$

Matemaatilise induktsiooniga saab tõestada, et

$$A^k = PD^kP^{-1}.$$

Näide

Arvutada A^{10}, kui $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 15 & 7 \end{pmatrix}$.

Lahendus. Leiame maatriksi A karakteristlikust võrrandist $det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ omaväärtused $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = 2$ ning nendele vastavad omavektorid on

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \qquad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = PD^{10}P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -5114 & -2046 \\ 15345 & 6139 \end{pmatrix}.$$