Maatriksi omaväärtused ja omavektorid

Mati Väljas

mati.valjas@ttu.ee
www.staff.ttu.ee/∼mvaljas
Tallinna Tehnikaülikool

20. detsember 2016. a.

Omavektorid ja omaväärtused

Olgu A $n-$järku ruutmaatriks

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Vaatleme aritmeetilise vektorruumi $\mathbb{R}^n$ vektoreid üheveeruliste maatriksitena, so

$$\vec{x} \equiv X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Omavektori ja omaväärtuse definitsioon

Definitsioon

Ruutmaatriksi A omavektoriks nimetatakse vektorit $\vec{x} \neq \vec{\theta}$ kui

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{ehk} \quad A\vec{x} = \lambda\vec{x},$$

kus λ on mingi skalaar. Skalaari λ nimetatakse maatriksi A omaväärtuseks ja öeldakse, et $\vec{x}$ on omaväärtusele λ vastav omavektor.

Omaväärtuste ja omavektorite leidmine

Omaväärtuste ja omavektorite leidmiseks kirjutame tingimuse $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ kujul $A\vec{x} = \lambda E\vec{x}$, mis on ekvivalentne tingimusega

$$(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{\theta}.$$

ehk pikemalt

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

See on lineaarne homogeenne võrrandisüsteem.

Karakteristlik võrrand

See võrrandisüsteem omab mittetriviaalseid lahendeid parajasti siis, kui

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ehk} \qquad det(A-\lambda E) = 0.$$

Seda võrrandit nimetatatakse maatriksi A karakteristlikuks võrrandiks. Selle võrrandi lahendid on maatriksi A omaväärtused.

Lause

Kui A on $n-$järku ruutmaatriks. Siis λ on maatriksi A omaväärtus parajasti siis, kui

$$det(A-\lambda E) = 0.$$

Näide 1

Näide

Leida maatriksi A karakteristlik võrrand ja omaväärtused, kui

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -19 & 13 \\ 3 & -9 & 5 \\ 3 & -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Moodustame karakteristliku võrrandi

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -19 & 13 \\ 3 & -9-\lambda & 5 \\ 3 & -7 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

millest pärast determinadi arvutamist leiame

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda - 4 = 0.$$

Omaväärtuste leidmiseks tuleb lahendada viimane võrrand.

Näide 1 - omaväärtuste leidmine

Kuna karakterisliku võrrandi vasak pool on alati polünoom, siis selle teguriteks lahutamiseks võime kasutada Horneri skeemi või sobivaid algebralisi teisendusi. Antud juhul saame kasutada algebralisi teisendusi

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda - 4 = \lambda^2(\lambda + 1) - 4(\lambda + 1) =$$
$$= (\lambda + 1)(\lambda^2 - 4) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda - 2) = 0,$$

millest leiame, et maatriksi A omaväärtused on:

$$\lambda_1 = -1, \ \ \lambda_2 = -2, \ \ \lambda_3 = 2.$$

Näide 2

Näide

Leida maatriksi B karakteristlik võrrand ja omaväärtused, kui

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seega

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^3(\lambda-2)(\lambda-1)^2 = 0,$$

millest leiame omaväärtused

$$\lambda_1 = 2, \;\; \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Antud juhul öeldakse, et $\lambda = 1$ on kahekordne omaväärtus.

Karakteristlik polünoom

Tuginedes determiandi omadustele saame järeldada, et $n-$järku ruutmaatriksi A karaktertistliku võrrandi $det(A-\lambda E)=0$ vasak pool on muutuja λ suhtes $n-$astme polünoom, so

$$det(A-\lambda E)=(-1)^n(\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+p_2\lambda^{n-2}+\ldots+p_{n-1}\lambda+p_n).$$

Öeldut kinnitavad ka eespool esitatud näited.

Vastavalt algebra põhiteoreemile on igal $n-$astme polünoomil üle kompleksarvude korpuse (kordsust arvestades) n juurt,so

$$det(A-\lambda E)=(-1)^n(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n).$$

NB! Käeoleva kursuse raames vaatleme ainult niisuguseid maatrikseid, mille kõik omaväärtused on reaalarvulised.

Karakteristlik polünoom

Tuginedes determiandi omadustele saame järeldada, et $n-$järku ruutmaatriksi A karaktertistliku võrrandi $det(A - \lambda E) = 0$ vasak pool on muutuja λ suhtes $n-$astme polünoom, so

$$det(A - \lambda E) = (-1)^n(\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n).$$

Öeldut kinnitavad ka eespool esitatud näited.

Vastavalt algebra põhiteoreemile on igal $n-$astme polünoomil üle kompleksarvude korpuse (kordsust arvestades) n juurt,so

$$det(A - \lambda E) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n).$$

NB! Käeolева kursuse raames vaatleme ainult niisuguseid maatrikseid, mille kõik omaväärtused on reaalarvulised.

Karakteristlik polünoom

Tuginedes determiandi omadustele saame järeldada, et $n-$järku ruutmaatriksi A karaktertistliku võrrandi $det(A-\lambda E)=0$ vasak pool on muutuja λ suhtes $n-$astme polünoom, so

$$det(A-\lambda E)=(-1)^n(\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+p_2\lambda^{n-2}+\ldots+p_{n-1}\lambda+p_n).$$

Öeldut kinnitavad ka eespool esitatud näited.

Vastavalt algebra põhiteoreemile on igal $n-$astme polünoomil üle kompleksarvude korpuse (kordsust arvestades) n juurt,so

$$det(A-\lambda E)=(-1)^n(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n).$$

NB! Käeoleva kursuse raames vaatleme ainult niisuguseid maatrikseid, mille kõik omaväärtused on reaalarvulised.

Lause

Kui maatriksi A omaväärtused on $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, siis

$$det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n.$$

Tõestus.

Võtame karakteristlikus polünoomis

$$det(A - \lambda E) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_n)$$

muutuja $\lambda = 0$, millest järeldubki väide. □

Samuti saame, et karkteristliku polünoomi vabaliige $p_n = (-1)^n det(A)$. Sellest järeldub, et regulaarse maatriksi A ükski omaväärtus ei ole võrdne nulliga.

Lause

Kui maatriksi A omaväärtused on $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, siis

$$det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n.$$

Tõestus.

Võtame karakteristlikus polünoomis

$$det(A - \lambda E) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_n)$$

muutuja $\lambda = 0$, millest järeldubki väide. $\square$

Samuti saame, et karkteristliku polünoomi vabaliige $p_n = (-1)^n det(A)$. Sellest järeldub, et regulaarse maatriksi A ükski omaväärtus ei ole võrdne nulliga.

Omaväärtuse algebraline kordsus

Olgu $n-$järku ruutmaatriksil k erinevat omaväärtust $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Siis karakteristliku polünoomi saame esitada kujul

$$det(A - \lambda E) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \ldots (\lambda - \lambda_k)^{n_k},$$

kus $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Sellisel juhul öeldakse, et omaväärtuse λ_i $(i \in \{1, 2, \ldots, k\})$ ***algebraline kordsus*** on n_i.

Omaväärtuse algebraline kordsus

Olgu $n-$järku ruutmaatriksil k erinevat omaväärtust $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Siis karakteristliku polünoomi saame esitada kujul

$$det(A - \lambda E) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \ldots (\lambda - \lambda_k)^{n_k},$$

kus $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Sellisel juhul öeldakse, et omaväärtuse λ_i $(i \in \{1, 2, \ldots, k\})$ ***algebraline kordsus*** on n_i.

Lause

Maatriksi A erinevatele omaväärtustele vastavd omavektorid $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ on lineaarselt sõltumatud.

Tõestus.
Olgu $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ omaväärtustele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ vastavad omavektorid.

Oletame väite vastaselt, et $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ on lineaarselt sõltuvad ja konstrueerime vastuolu.

Olgu nende vektorite hulgas r lineaarselt sõlumatut vektorit. Kuna üks nullvektorist erinev vektor on lineaarselt sõltumatu, siis $1 \leqslant r < k$.

Eeldame, et just esimesed r vektorit on lineaarselt sõltumatud (vektorite ümbernummerdamise teel on niisugune olukord alati saavutatav).

Seega vektorid $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r, \vec{v}_{r+1}$ on lineaarselt sõltuvad, st leidub niisugune mittetriviaalne lineaarkombinatsioon, et

$$\mu_1\vec{v}_1 + \mu_2\vec{v}_2 + \ldots + \mu_r\vec{v}_r + \mu_{r+1}\vec{v}_{r+1} = \vec{\theta}. \qquad (*)$$

Kuna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r, \vec{v}_{r+1}$ on maatriksi A omavektorid, siis

$$A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1, \ldots, A\vec{v}_r = \lambda_r\vec{v}_r,\ A\vec{v}_{r+1} = \lambda_{r+1}\vec{v}_{r+1}.$$

$$A(\mu_1\vec{v}_1 + \mu_2\vec{v}_2 + \ldots + \mu_r\vec{v}_r + \mu_{r+1}\vec{v}_{r+1}) = A\vec{\theta} = \vec{\theta}.$$

$$\mu_1\lambda_1\vec{v}_1 + \mu_2\lambda_2\vec{v}_2 + \ldots + \mu_r\lambda_r\vec{v}_r + \mu_{r+1}\lambda_{r+1}\vec{v}_{r+1} = \vec{\theta}. \qquad (**)$$

Korrutame (*) teguriga λ_{r+1} ja lahutame (**)-(*)

$$\mu_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1})\vec{v}_1 + \mu_2(\lambda_2 - \lambda_{r+1})\vec{v}_2 + \ldots + \mu_r(\lambda_r - \lambda_{r+1})\vec{v}_r = \vec{\theta}.$$

Kuna vektorid $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r$ on lineaarselt sõlumatud, siis kõik viimase lineaarkombinatsiooni kordajad on nullid

$$\mu_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1}) = \mu_2(\lambda_2 - \lambda_{r+1}) = \ldots = \mu_r(\lambda_r - \lambda_{r+1}) = 0.$$

Kuna kõik omaväärtused $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, \lambda_{r+1}$ on erinevad, siis järeldub, et

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_r = 0.$$

(*) $\Rightarrow \mu_{r+1}\vec{v}_{r+1} = \vec{\theta}$. Kuna $\vec{v}_{r+1} \neq \vec{\theta}$, siis

$$\mu_{r+1} = 0.$$

Olemegi saanud vastuolu, sest nullvektori saame ainult siis, kui kõik lineaarkombinatsiooni (*) kordajad on nullid, so

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_r = \mu_{r+1} = 0.$$

Tekkinud vastuolu tõestabki meie väite.

Näide 3

Näide

Leida maatriksi A omavektorid, kui

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -19 & 13 \\ 3 & -9 & 5 \\ 3 & -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lahendus.
Näites 1 leidsime, et selle maatriksi omaväärtused on:

$$\lambda_1 = -1, \;\; \lambda_2 = -2, \;\; \lambda_3 = 2.$$

Omavektorite leidmiseks tuleb iga omaväärtuse λ korral lahendada lineaarne homogeenne võrrandisüsteem:

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -19 & 13 \\ 3 & -9-\lambda & 5 \\ 3 & -7 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Näide 3 - lahendus

$$\lambda_1 = -1 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 6 & -19 & 13 \\ 3 & -8 & 5 \\ 3 & -7 & 4 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_1 = c, \\ x_2 = c, \\ x_3 = c, \end{cases} \;\Rightarrow\; \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_2 = -2 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 7 & -19 & 13 \\ 3 & -7 & 5 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_1 = -c, \\ x_2 = c, \\ x_3 = 2c, \end{cases} \;\Rightarrow\; \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_3 = 2 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 3 & -19 & 13 \\ 3 & -11 & 5 \\ 3 & -7 & 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_1 = 2c, \\ x_2 = c, \\ x_3 = c, \end{cases} \;\Rightarrow\; \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Näide

Leida maatriksite A ja B omavektorid, kui

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

.

Lahendus.

$$det(A - \lambda E) = (-1)^3(\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0.$$

$$det(B - \lambda E) = (-1)^3(\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0.$$

Maatriksitel A ja B on kaks erinevat omaväärtust

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1,$$

kusjuures omaväärtuse λ_1 algebraline kordsus on 2.

Leiame maatriksi A kahekordsele omaväärtusele $\lambda_1 = 1$ vastavad omavekrorid.

$$A \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = c_1, \\ x_2 = \quad c_2, \\ x_3 = c_1, \end{cases}$$

millest

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_2 = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2.$$

Seega iga omavektor avaldub kahe lineaarselt sõltumatu omavektori $\vec{v}_1$ ja $\vec{v}_2$ lineaarse kombinatsioonina. Teisiti öeldes, kahekordsele omaväärtusele $\lambda_1 = 1$ vastavad omavektorid $\vec{v}_1$ ja $\vec{v}_2$ moodustavad kahemõõtmelise ***omaruumi***.

Maatriksi B kahekordse omaväärtuse $\lambda_1 = 1$ korral kahemõõtmelist omaruumi ei teki.

$$B \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = \ \ 0, \\ x_2 = 2c, \\ x_3 = \ \ c, \end{cases} \quad ,$$

millest

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} c = c\vec{v}.$$

Näeme, et antud juhul vastab omaväärtusele $\lambda_1 = 1$, mille algebraline kordsus on 2, ainult ühemõõtmeline omaruum.

Maatrikiste A ja B omaväärtusele $\lambda_2 = -1$ vastab ühemõõtmeline omaruum.

Omaväärtuse geomeetriline kordrsus

Definitsioon

Maatriksi A omaväärtusele λ vastava omaruumi mõõdet nimetatakse selle ***omaväärtuse geomeetriliseks kordsuseks***.

Lause

Maatriksi omaväärtuse geomeetriline kordsus ei ületa selle algebralist kordsust.

Näeme, et näites 4 saadud tulemus, ei ole viimase lause väitega vastuolus .