Analüütiline geomeetria

Teist järku joonte kanoonilised võrrandid

Mati Väljas

mati.valjas@ttu.ee
www.staff.ttu.ee/∼mvaljas
Tallinna Tehnikaülikool

May 15, 2013

Ellips

Definitsioon

Punktihulka tasandil, mille iga punkti kauguste summa kahest fikseeritud punktist (fookusest) on konstantne ja suurem kui fookustevaheline kaugus, nimetatakse ***ellipsiks***.

Leiame võrrandi, mida rahuldavad ellipsi kõigi punktide koordinaadid. Selleks tuleb tasandil fikseerida mingi koordinaatide süsteem ehk valida reeper.

Olgu tasandi kaks fikseeritud punkti F_1 ja F_2 ellipsi fookused. Lõigu F_1F_2 keskpunkti valime reeperi alguspunktiks O ja neid punkte ühendava sirge võtame x-teljeks positiivse suunaga punktist F_1 punkti F_2 ning sellega ristuva sirge y-teljeks. Niiviisi ellipsiga seotud ristreeperit nimetatakse ***ellipsi kanooniliseks reeperiks***.[1]

[1] Reeperit, mis on üheselt seotud uuritava kujundiga, nimetatakse selle kujundi kanooniliseks reeperiks.

Ellips

Definitsioon

Punktihulka tasandil, mille iga punkti kauguste summa kahest fikseeritud punktist (fookusest) on konstantne ja suurem kui fookustevaheline kaugus, nimetatakse ***ellipsiks***.

Leiame võrrandi, mida rahuldavad ellipsi kõigi punktide koordinaadid. Selleks tuleb tasandil fikseerida mingi koordinaatide süsteem ehk valida reeper.

Olgu tasandi kaks fikseeritud punkti F_1 ja F_2 ellipsi fookused. Lõigu F_1F_2 keskpunkti valime reeperi alguspunktiks O ja neid punkte ühendava sirge võtame x-teljeks positiivse suunaga punktist F_1 punkti F_2 ning sellega ristuva sirge y-teljeks. Niiviisi ellipsiga seotud ristreeperit nimetatakse ***ellipsi kanooniliseks reeperiks***.[1]

[1] Reeperit, mis on üheselt seotud uuritava kujundiga, nimetatakse selle kujundi kanooniliseks reeperiks.

Ellips

Definitsioon

Punktihulka tasandil, mille iga punkti kauguste summa kahest fikseeritud punktist (fookusest) on konstantne ja suurem kui fookustevaheline kaugus, nimetatakse ***ellipsiks***.

Leiame võrrandi, mida rahuldavad ellipsi kõigi punktide koordinaadid. Selleks tuleb tasandil fikseerida mingi koordinaatide süsteem ehk valida reeper.
Olgu tasandi kaks fikseeritud punkti F_1 ja F_2 ellipsi fookused. Lõigu F_1F_2 keskpunkti valime reeperi alguspunktiks O ja neid punkte ühendava sirge võtame x-teljeks positiivse suunaga punktist F_1 punkti F_2 ning sellega ristuva sirge y-teljeks. Niiviisi ellipsiga seotud ristreeperit nimetatakse ***ellipsi kanooniliseks reeperiks***.[1]

[1] Reeperit, mis on üheselt seotud uuritava kujundiga, nimetatakse selle kujundi kanooniliseks reeperiks.

Ellips

Ellipsi fookuste koordinaadid selle reeperi suhtes on $F_1(-c, 0)$ ja $F_2(c, 0)$.

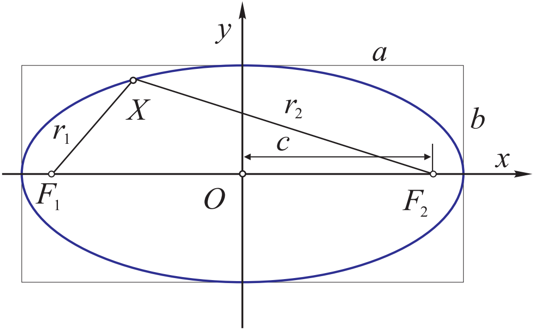


Figure : Ellips

Ellips

Olgu $X(x, y)$ ellipsi mistahes punkt. Lõiku, mis ühendab ellipsi fookust ja joone mistahes punkti, nimetatakse ***fokaalraadiuseks***.

Ellipsi fokaalraadiustele vastavad vektorid on

$$\overrightarrow{F_1X} = (x + c, y) \quad \text{ja} \quad \overrightarrow{F_2X} = (x - c, y).$$

Fokaalraadiuste pikkused on $r_1 = |\overrightarrow{F_1X}|$ ja $r_2 = |\overrightarrow{F_2X}|$. Ellipsi definitsioonist järeldub, et $r_1 + r_2 = 2a$, kus $a > 0$ on sobivalt valitud konstant. Seega

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a \quad (a > 0),$$

millest pärast ruutu tõstmist ja avaldise korrastamist saame

$$\sqrt{x^2 + y^2 + c^2 + 2xc}\,\sqrt{x^2 + y^2 + c^2 - 2xc} = 2a^2 - (x^2 + y^2 + c^2).$$

Ellips

Olgu $X(x, y)$ ellipsi mistahes punkt. Lõiku, mis ühendab ellipsi fookust ja joone mistahes punkti, nimetatakse ***fokaalraadiuseks***.

Ellipsi fokaalraadiustele vastavad vektorid on

$$\overrightarrow{F_1X} = (x + c, y) \quad \text{ja} \quad \overrightarrow{F_2X} = (x - c, y).$$

Fokaalraadiuste pikkused on $r_1 = |\overrightarrow{F_1X}|$ ja $r_2 = |\overrightarrow{F_2X}|$. Ellipsi definitsioonist järeldub, et $r_1 + r_2 = 2a$, kus $a > 0$ on sobivalt valitud konstant. Seega

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad (a > 0),$$

millest pärast ruutu tõstmist ja avaldise korrastamist saame

$$\sqrt{x^2 + y^2 + c^2 + 2xc}\,\sqrt{x^2 + y^2 + c^2 - 2xc} = 2a^2 - (x^2 + y^2 + c^2).$$

Ellips

Olgu $X(x, y)$ ellipsi mistahes punkt. Lõiku, mis ühendab ellipsi fookust ja joone mistahes punkti, nimetatakse ***fokaalraadiuseks***.

Ellipsi fokaalraadiustele vastavad vektorid on

$$\overrightarrow{F_1X} = (x + c, y) \quad \text{ja} \quad \overrightarrow{F_2X} = (x - c, y).$$

Fokaalraadiuste pikkused on $r_1 = |\overrightarrow{F_1X}|$ ja $r_2 = |\overrightarrow{F_2X}|$. Ellipsi definitsioonist järeldub, et $r_1 + r_2 = 2a$, kus $a > 0$ on sobivalt valitud konstant. Seega

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad (a > 0),$$

millest pärast ruutu tõstmist ja avaldise korrastamist saame

$$\sqrt{x^2 + y^2 + c^2 + 2xc}\,\sqrt{x^2 + y^2 + c^2 - 2xc} = 2a^2 - (x^2 + y^2 + c^2).$$

Ellips

Olgu $X(x, y)$ ellipsi mistahes punkt. Lõiku, mis ühendab ellipsi fookust ja joone mistahes punkti, nimetatakse ***fokaalraadiuseks***.

Ellipsi fokaalraadiustele vastavad vektorid on

$$\overrightarrow{F_1X} = (x + c, y) \quad \text{ja} \quad \overrightarrow{F_2X} = (x - c, y).$$

Fokaalraadiuste pikkused on $r_1 = |\overrightarrow{F_1X}|$ ja $r_2 = |\overrightarrow{F_2X}|$. Ellipsi definitsioonist järeldub, et $r_1 + r_2 = 2a$, kus $a > 0$ on sobivalt valitud konstant. Seega

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad (a > 0),$$

millest pärast ruutu tõstmist ja avaldise korrastamist saame

$$\sqrt{x^2 + y^2 + c^2 + 2xc}\,\sqrt{x^2 + y^2 + c^2 - 2xc} = 2a^2 - (x^2 + y^2 + c^2).$$

Ellips

Tõstame leitud avaldise veelkord ruutu ja kasutame vasakul pool korrutamise abivalemit. Saame

$$(x^2+y^2+c^2)^2-4x^2c^2 = 4a^4-4a^2(x^2+y^2+c^2)+(x^2+y^2+c^2)^2.$$

Koondame selles avaldises sarnased liikmed ja viime muutuva punkti koordinaate sisaldavad liidetavad võrduse vasakule poole, siis saame

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2). \tag{1}$$

Ellipsi definitsiooni põhjal $a^2-c^2 \neq 0$ ($a > c$) ja seetõttu võime viimase võrduse mõlemaid pooli ilma kitsendusteta korrutada teguriga $\frac{1}{a^2(a^2-c^2)}$, siis

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1,$$

kus $b^2 = a^2-c^2$.

Ellips

Tõstame leitud avaldise veelkord ruutu ja kasutame vasakul pool korrutamise abivalemit. Saame

$$(x^2+y^2+c^2)^2-4x^2c^2 = 4a^4-4a^2(x^2+y^2+c^2)+(x^2+y^2+c^2)^2.$$

Koondame selles avaldises sarnased liikmed ja viime muutuva punkti koordinaate sisaldavad liidetavad võrduse vasakule poole, siis saame

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2). \tag{1}$$

Ellipsi definitsiooni põhjal $a^2-c^2 \neq 0$ $(a > c)$ ja seetõttu võime viimase võrduse mõlemaid pooli ilma kitsendusteta korrutada teguriga $\dfrac{1}{a^2(a^2-c^2)}$, siis

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1,$$

kus $b^2 = a^2-c^2$.

Ellips

Tõstame leitud avaldise veelkord ruutu ja kasutame vasakul pool korrutamise abivalemit. Saame

$$(x^2+y^2+c^2)^2-4x^2c^2 = 4a^4-4a^2(x^2+y^2+c^2)+(x^2+y^2+c^2)^2.$$

Koondame selles avaldises sarnased liikmed ja viime muutuva punkti koordinaate sisaldavad liidetavad võrduse vasakule poole, siis saame

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2). \tag{1}$$

Ellipsi definitsiooni põhjal $a^2-c^2 \neq 0$ ($a > c$) ja seetõttu võime viimase võrduse mõlemaid pooli ilma kitsendusteta korrutada teguriga $\dfrac{1}{a^2(a^2-c^2)}$, siis

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1,$$

kus $b^2 = a^2-c^2$.

Ellips

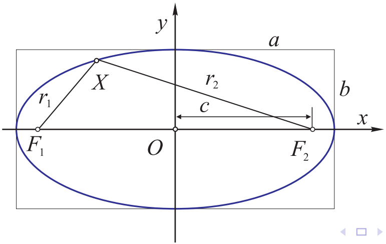
Võrrandist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

saame teha lihtsa järelduse:

$$\frac{x^2}{a^2} \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad -a \leqslant x \leqslant a,$$
$$\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad -b \leqslant y \leqslant b,$$

seega paikneb ellips tervikuna nende võrratustega määratud ristkülikus.



Ellips

Ellipsi kanoonilise võrrandi tuletamiseks tõstsime võrdust $r_1 + r_2 = 2a$ kaks korda ruutu.

Niisugune tegevus võib tekitada olukorra, et võrrand

$$r_1 + r_2 = 2a$$

ja ellipsi kanooniline võrrand

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ei ole samaväärsed, s.t lisaks ellipsi definitsioonis kirjeldatud punktidele leidub tasandil veel punkte, mille koordinaadid rahuldavad võrrandit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Seega tuleb kontrollida, et seda võrrandit rahuldavad tõepoolest ainult ellipsi punktid.

Ellips

Ellipsi kanoonilise võrrandi tuletamiseks tõstsime võrdust $r_1 + r_2 = 2a$ kaks korda ruutu.
Niisugune tegevus võib tekitada olukorra, et võrrand

$$r_1 + r_2 = 2a$$

ja ellipsi kanooniline võrrand

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ei ole samaväärsed, s.t lisaks ellipsi definitsioonis kirjeldatud punktidele leidub tasandil veel punkte, mille koordinaadid rahuldavad võrrandit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Seega tuleb kontrollida, et seda võrrandit rahuldavad tõepoolest ainult ellipsi punktid.

Ellips

Ellipsi kanoonilise võrrandi tuletamiseks tõstsime võrdust $r_1 + r_2 = 2a$ kaks korda ruutu.
Niisugune tegevus võib tekitada olukorra, et võrrand

$$r_1 + r_2 = 2a$$

ja ellipsi kanooniline võrrand

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ei ole samaväärsed, s.t lisaks ellipsi definitsioonis kirjeldatud punktidele leidub tasandil veel punkte, mille koordinaadid rahuldavad võrrandit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Seega tuleb kontrollida, et seda võrrandit rahuldavad tõepoolest ainult ellipsi punktid.

Ellips

Olgu $X(x, y)$ mingi punkt tasandil, mille koordinaadid rahuldavad võrrandit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

lisaks valime kaks punkti $F_1(-c, 0)$ ja $F_2(c, 0)$, kus c on määratud võrdusega

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad (c < a).$$

Nüüd on vaja kontrollida, et

$$|\overrightarrow{F_1X}| + |\overrightarrow{F_2X}| = 2a.$$

Ellips

Olgu $X(x, y)$ mingi punkt tasandil, mille koordinaadid rahuldavad võrrandit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

lisaks valime kaks punkti $F_1(-c, 0)$ ja $F_2(c, 0)$, kus c on määratud võrdusega

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad (c < a).$$

Nüüd on vaja kontrollida, et

$$|\overrightarrow{F_1X}| + |\overrightarrow{F_2X}| = 2a.$$

Ellips

Olgu $X(x, y)$ mingi punkt tasandil, mille koordinaadid rahuldavad võrrandit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

lisaks valime kaks punkti $F_1(-c, 0)$ ja $F_2(c, 0)$, kus c on määratud võrdusega

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad (c < a).$$

Nüüd on vaja kontrollida, et

$$|\overrightarrow{F_1X}| + |\overrightarrow{F_2X}| = 2a.$$

Ellips

Kahe punkti vahelise kauguse arvutamise valemist leiame:

$$|\overrightarrow{F_1X}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2},$$
$$|\overrightarrow{F_2X}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2}.$$

Ellipsi kanoonilisest võrrandist saame

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

mille asendame vektori $\overrightarrow{F_1X}$ pikkuse avaldisse:

$$|\overrightarrow{F_1X}| = \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} =$$
$$= \sqrt{x^2\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) + 2xc + c^2 + b^2}.$$

Ellips

Kahe punkti vahelise kauguse arvutamise valemist leiame:

$$|\overrightarrow{F_1X}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2},$$
$$|\overrightarrow{F_2X}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2}.$$

Ellipsi kanoonilisest võrrandist saame

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

mille asendame vektori $\overrightarrow{F_1X}$ pikkuse avaldisse:

$$|\overrightarrow{F_1X}| = \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} =$$
$$= \sqrt{x^2\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) + 2xc + c^2 + b^2}.$$

Ellips

Kahe punkti vahelise kauguse arvutamise valemist leiame:

$$|\overrightarrow{F_1X}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2},$$
$$|\overrightarrow{F_2X}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2}.$$

Ellipsi kanoonilisest võrrandist saame

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

mille asendame vektori $\overrightarrow{F_1X}$ pikkuse avaldisse:

$$|\overrightarrow{F_1X}| = \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} =$$
$$= \sqrt{x^2\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) + 2xc + c^2 + b^2}.$$

Ellips

Kasutades seost

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad (c < a),$$

saame vektori $\overrightarrow{F_1X}$ pikkuse avaldise teisendada kujule

$$|\overrightarrow{F_1X}| = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 + 2xc + a^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}x + a\right)^2},$$

millest

$$|\overrightarrow{F_1X}| = \pm\left(a + \frac{c}{a}x\right).$$

Analoogiliselt saame, et

$$|\overrightarrow{F_2X}| = \pm\left(a - \frac{c}{a}x\right).$$

Ellips

Kasutades seost

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad (c < a),$$

saame vektori $\overrightarrow{F_1X}$ pikkuse avaldise teisendada kujule

$$|\overrightarrow{F_1X}| = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 + 2xc + a^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}x + a\right)^2},$$

millest

$$|\overrightarrow{F_1X}| = \pm\left(a + \frac{c}{a}x\right).$$

Analoogiliselt saame, et

$$|\overrightarrow{F_2X}| = \pm\left(a - \frac{c}{a}x\right).$$

Ellips

Kasutades seost

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad (c < a),$$

saame vektori $\overrightarrow{F_1X}$ pikkuse avaldise teisendada kujule

$$|\overrightarrow{F_1X}| = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 + 2xc + a^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}x + a\right)^2},$$

millest

$$|\overrightarrow{F_1X}| = \pm\left(a + \frac{c}{a}x\right).$$

Analoogiliselt saame, et

$$|\overrightarrow{F_2X}| = \pm\left(a - \frac{c}{a}x\right).$$

Ellips

Leitud võrdustes tuleb märgid valida selliselt, et vektorite $|\overrightarrow{F_1X}|$ ja $|\overrightarrow{F_2X}|$ pikkused oleksid positiivsed arvud. Arvestades võrratusi

$$\frac{x^2}{a^2} \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad -a \leqslant x \leqslant a,$$
$$\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad -b \leqslant y \leqslant b,$$

ja tingimust $c < a$, saame

$$r_1 = |\overrightarrow{F_1X}| = a + \frac{c}{a}x,$$
$$r_2 = |\overrightarrow{F_2X}| = a - \frac{c}{a}x,$$

millest nende võrduste liitmisel saamegi kontrollitava tingimuse.

Ellips

Kokkuvõttes oleme tõestanud järgmie teoreemi.

Teoreem

Punktihulk tasandil on ellips parajasti siis, kui tasandil leidub ristreeper, mille suhtes selle hulga punktide koordinaadid rahuldavad võrrandit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Viimast võrrandit nimetatakse ***ellipsi kanooniliseks võrrandiks***.

Asjaolust, et ellipsi kanooniline võrrand sisaldab ainult ruutudega liikmeid, järeldub, et ellips on koordinaattelgede ja koordinaatide alguspunkti suhtes sümmeetriline joon.

Tõepoolest, valides vabalt ellipsi punkti X koordinaatide x ja y märkide komplekti, saame

$$\frac{(\pm x)^2}{a^2} + \frac{(\pm y)^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ellips

Kokkuvõttes oleme tõestanud järgmie teoreemi.

Teoreem

Punktihulk tasandil on ellips parajasti siis, kui tasandil leidub ristreeper, mille suhtes selle hulga punktide koordinaadid rahuldavad võrrandit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Viimast võrrandit nimetatakse ***ellipsi kanooniliseks võrrandiks***.

Asjaolust, et ellipsi kanooniline võrrand sisaldab ainult ruutudega liikmeid, järeldub, et ellips on koordinaattelgede ja koordinaatide alguspunkti suhtes sümmeetriline joon.

Tõepoolest, valides vabalt ellipsi punkti X koordinaatide x ja y märkide komplekti, saame

$$\frac{(\pm x)^2}{a^2} + \frac{(\pm y)^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ellips

Kokkuvõttes oleme tõestanud järgmie teoreemi.

Teoreem

Punktihulk tasandil on ellips parajasti siis, kui tasandil leidub ristreeper, mille suhtes selle hulga punktide koordinaadid rahuldavad võrrandit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Viimast võrrandit nimetatakse ***ellipsi kanooniliseks võrrandiks***.

Asjaolust, et ellipsi kanooniline võrrand sisaldab ainult ruutudega liikmeid, järeldub, et ellips on koordinaattelgede ja koordinaatide alguspunkti suhtes sümmeetriline joon. Tõepoolest, valides vabalt ellipsi punkti X koordinaatide x ja y märkide komplekti, saame

$$\frac{(\pm x)^2}{a^2} + \frac{(\pm y)^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ellips

Kokkuvõttes oleme tõestanud järgmie teoreemi.

Teoreem

Punktihulk tasandil on ellips parajasti siis, kui tasandil leidub ristreeper, mille suhtes selle hulga punktide koordinaadid rahuldavad võrrandit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Viimast võrrandit nimetatakse ***ellipsi kanooniliseks võrrandiks***.

Asjaolust, et ellipsi kanooniline võrrand sisaldab ainult ruutudega liikmeid, järeldub, et ellips on koordinaattelgede ja koordinaatide alguspunkti suhtes sümmeetriline joon. Tõepoolest, valides vabalt ellipsi punkti X koordinaatide x ja y märkide komplekti, saame

$$\frac{(\pm x)^2}{a^2} + \frac{(\pm y)^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ellips

Definitsioon

Ellipsi ***ekstsentrilisuseks*** nimetatakse reaalarvu ε, mis on võrdne fookuskauguse ja pikema pooltelje pikkuse suhtega:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Kuna $c < a$, siis ellipsi ekstsentrilisus $\varepsilon < 1$.
Ellips, mille telgede pikkused on võrdsed, on ringjoon, sest

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

kus $R = a = b$. Võrdusest $c^2 = a^2 - b^2$ järeldub, et ringjoone korral $c = 0$ ja ellipsi fookused asuvad ringjoone keskpunktis ning ekstsentrilisus $\varepsilon = 0$.

Ellips

Definitsioon

Ellipsi ***ekstsentrilisuseks*** nimetatakse reaalarvu ε, mis on võrdne fookuskauguse ja pikema pooltelje pikkuse suhtega:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}\,.$$

Kuna $c < a$, siis ellipsi ekstsentrilisus $\varepsilon < 1$.
Ellips, mille telgede pikkused on võrdsed, on ringjoon, sest

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

kus $R = a = b$. Võrdusest $c^2 = a^2 - b^2$ järeldub, et ringjoone korral $c = 0$ ja ellipsi fookused asuvad ringjoone keskpunktis ning ekstsentrilisus $\varepsilon = 0$.

Ellips

Definitsioon

Ellipsi ***ekstsentrilisuseks*** nimetatakse reaalarvu ε, mis on võrdne fookuskauguse ja pikema pooltelje pikkuse suhtega:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} .$$

Kuna $c < a$, siis ellipsi ekstsentrilisus $\varepsilon < 1$.
Ellips, mille telgede pikkused on võrdsed, on ringjoon, sest

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

kus $R = a = b$. Võrdusest $c^2 = a^2 - b^2$ järeldub, et ringjoone korral $c = 0$ ja ellipsi fookused asuvad ringjoone keskpunktis ning ekstsentrilisus $\varepsilon = 0$.

Hüperbool

Definitsioon

Hüperbooliks nimetatakse punktihulka tasandil, mille iga punkti kauguste vahe absoluutväärtus kahest fikseeritud punktist (fookusest) on konstant, mis on väiksem fookustevahelisest kaugusest.

Teoreem

Punktihulk tasandil on hüperbool parajasti siis, kui tasandil leidub reeper, mille suhtes selle hulga punktide koordinaadid rahuldavad võrrandit

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2}$$

Viimast võrrandit nimetatakse ***hüperboolikanooniliseks võrrandiks***.

Hüperbool

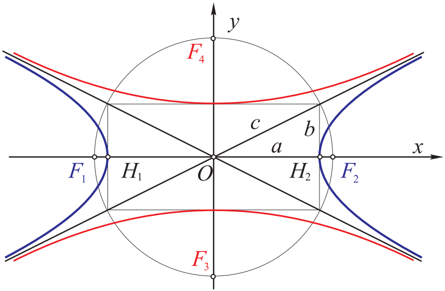


Figure : Hüperbool ja kaashüperbool

Definitsioon

Hüperbooli ***ekstsentrilisuseks*** nimetatakse reaalarvu ε, mis on võrdne fookuskauguse ja reaalse pooltelje pikkuse suhtega:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Hüperbool

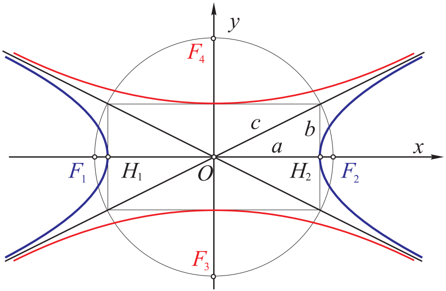


Figure : Hüperbool ja kaashüperbool

Definitsioon

Hüperbooli ***ekstsentrilisuseks*** nimetatakse reaalarvu ε, mis on võrdne fookuskauguse ja reaalse pooltelje pikkuse suhtega:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Parabool

Definitsioon

Punktihulka tasandil, mille iga punkti kaugus ühest fikseeritud punktist (fookusest) ja ühest fikseeritud sirgest (juhtjoonest) on võrdne, nimetatakse ***paraabooliks***.

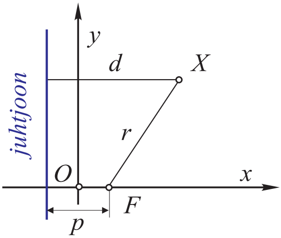


Figure : Parabooli kanooniline reeper

Parabool

Olgu parabooli fookuse ja juhtjoone vaheline kaugus p. Siis $F(\frac{p}{2}, 0)$ ja juhtjoone võrrand on $x = -\frac{p}{2}$. Olgu $X(x, y)$ – parabooli mistahes punkt. Lõiku, mis ühendab parabooli fookust ja joone mistahes punkti, nimetatakse ***fokaalraadiuseks***. Fokaalraadiusele vastav vektor on

$$\overrightarrow{FX} = \left(x - \frac{p}{2}, y\right).$$

Parabooli punkti X kaugus juhtjoonest on $d = |x + \frac{p}{2}|$ ja definitsiooni põhjal $r = |\overrightarrow{FX}| = d$, seega

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = |x + \frac{p}{2}|.$$

Võttes selle avaldise mõlemad pooled ruutu, saame pärast sarnaste liikmete koondamist

$$y^2 = 2px.$$

Parabool

Kontrollida, et võrrandit

$$y^2 = 2p\,x\,.$$

rahuldavad tõepoolest ainult parabooli punktid.

Teoreem

Punktihulk tasandil on parabool parajasti siis, kui tasandil leidub reeper, mille suhtes selle hulga punktide koordinaadid rahuldavad võrrandit

$$y^2 = 2p\,x\,.$$

Viimast võrrandit nimetatakse ***parabooli kanooniliseks võrrandiks***.

Parabool

Kontrollida, et võrrandit

$$y^2 = 2p\,x\,.$$

rahuldavad tõepoolest ainult parabooli punktid.

Teoreem

Punktihulk tasandil on parabool parajasti siis, kui tasandil leidub reeper, mille suhtes selle hulga punktide koordinaadid rahuldavad võrrandit

$$y^2 = 2p\,x\,.$$

Viimast võrrandit nimetatakse ***parabooli kanooniliseks võrrandiks***.

Parabool

Kui punkt $X(x, y)$ on parabooli punkt, siis on parabooli punkt ka $X_1(x, -y)$, sest

$$(-y)^2 = 2px \qquad \Longrightarrow \qquad y^2 = 2px,$$

millest järeldub, et kanoonilise võrrandiga antud parabool on sümmeetriline x-telje suhtes.

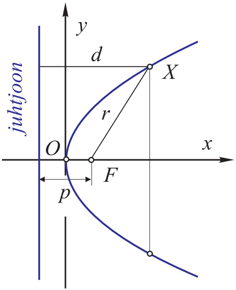


Figure : Parabool