

# Analüütiline geomeetria

## Tasandite kimp ruumis

Mati Väljas

February 26, 2015

# Tasandite kimbu mõiste

**Definitsioon.** Ühte sirget läbivate tasandite hulka ruumis nimetatakse **tasandite kimbuks**. Nende tasandite ühist lõikesirget nimetatakse **tasandikimbu teljeks**.

Olgu ruumis antud kaks lõikuvat tasandit:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

**Teoreem.** Tasandeid

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

sisaldav kimp koosneb parajasti tasanditest üldvõrrandiga

$$\lambda(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0, (**)$$

kus  $\lambda$  ja  $\mu$  on vabalt valitud reaalarvud, mis ei ole korruga nullid.

# Tõestus

## ***Tarvilikkus.***

Oletame, et kimp sisaldab tasandeid (\*) ja näitame, et (\*\*) tasand, mis kuulub kimpu.

$$(\lambda a_1 + \mu a_2)x + (\lambda b_1 + \mu b_2)y + (\lambda c_1 + \mu c_2)z + (\lambda d_1 + \mu d_2) = 0.$$

See on lineaarne võrrand muutujatest  $x$ ,  $y$  ja  $z$  ning seetõttu osutub ruumis mingi tasandi võrrandiks. Sellel tasandil asub tasandite (\*) lõikesirge, sest võrrandi (\*\*) sulgavaldised on võrdsed nulliga.

# Tõestus

## **Piisavus.**

Oletame, et võrrandiga (\*\*) on antud tasandite kimp ja näitame, et selle võrrandiga saab esitada iga kimpu kuuluvat tasandit.

Peame leidma niisuguse kordajate  $\lambda$  ja  $\mu$  komplekti, et võrrand (\*\*) esitaks soovitud tasandi.

Valime ruumis punkti  $A(x_A, y_A, z_A)$ , mis ei asu kimbu teljel. Asendame punkti  $A$  koordinaadid võrrandisse (\*\*).

$$\lambda \underbrace{(a_1 x_A + b_1 y_A + c_1 z_A + d_1)}_M + \mu \underbrace{(a_2 x_A + b_2 y_A + c_2 z_A + d_2)}_N = 0.$$

Siin on ainsateks muutujateks kordajad  $\lambda$  ja  $\mu$ .

# Tõestus

Sellel võrrandil

$$\lambda M + \mu N = 0$$

on lõpmata palju lahendeid. Üks võimalus lahendite valimiseks on

$$\lambda = N \quad \text{ja} \quad \mu = -M.$$

Seega võrrandi (\*\*)  
võime kirjutada kujul

$$(a_2x_A + b_2y_A + c_2z_A + d_2)(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) - \\ -(a_1x_A + b_1y_A + c_1z_A + d_1)(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0,$$

On lihtne veenduda, et see on tasandi võrrand, millel asub punkt  $A$ .

# Tõestus

Kuna tasandid (\*) on lõikuvad, siis kordajad  $M$  ja  $N$  ei saa korruga olla nullid. Kui  $M = N = 0$ , siis saame tasandite võrranditest koosneva võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a_1 x_A + b_1 y_A + c_1 z_A + d_1 = 0, \\ a_2 x_A + b_2 y_A + c_2 z_A + d_2 = 0, \end{cases}$$

mille lahendiks on punkti  $A(x_A, y_A, z_A)$  koordinaadid. See ei ole võimalik, sest meie valiku tõttu punkt  $A$  ei asu tasandi kimbuteljel.

