Analüütiline geomeetria

Punkti kaugus tasandist. Tasandi normaalvõrrand.

Mati Väljas

mati.valjas@ttu.ee
www.staff.ttu.ee/∼mvaljas
Tallinna Tehnikaülikool

April 23, 2012

Punkti kaugus tasandist

Punktihulk ruumis $\mathbb{R}^3$, mille punktide koordinaadid rahuldavad võrrandit

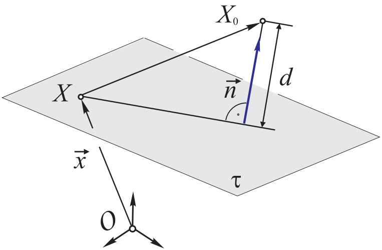
$$ax + by + cz + d = 0,$$

on tasand.

Püstitame ülesande leida punkti $X_0(x_0, y_0, z_0)$ kaugus sellest tasandist.

Definitsioon

Punkti kauguseks tasandist nimetatakse sellest punktist tasandile tõmmatud ristlõigu pikkust.



Punkti kaugus tasandist

Punktihulk ruumis $\mathbb{R}^3$, mille punktide koordinaadid rahuldavad võrrandit

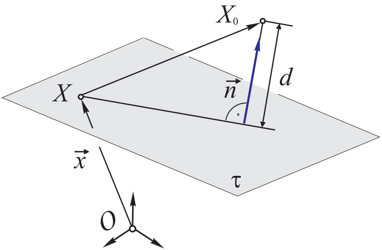
$$ax + by + cz + d = 0,$$

on tasand.

Püstitame ülesande leida punkti $X_0(x_0, y_0, z_0)$ kaugus sellest tasandist.

Definitsioon

Punkti kauguseks tasandist nimetatakse sellest punktist tasandile tõmmatud ristlõigu pikkust.



Punkti kaugus tasandist

Punktihulk ruumis $\mathbb{R}^3$, mille punktide koordinaadid rahuldavad võrrandit

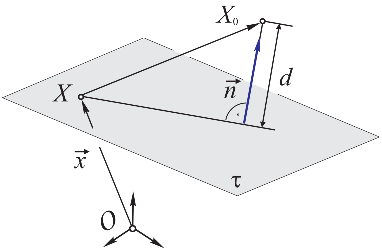
$$ax + by + cz + d = 0,$$

on tasand.

Püstitame ülesande leida punkti $X_0(x_0, y_0, z_0)$ kaugus sellest tasandist.

Definitsioon

Punkti kauguseks tasandist nimetatakse sellest punktist tasandile tõmmatud ristlõigu pikkust.



Kauguse leidmine

Olgu $X(x, y, z)$ tasandi mingi punkt. Siis
$\overrightarrow{XX_0} = (x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z)$ ja

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{XX_0} = a(x_0 - x) + b(y_0 - y) + c(z_0 - z),$$

kus $\vec{n} = (a, b, c)$ on tasandi normaalvektor.

Avades sulud ja kasutades tasandi üldvõrrandit , saame skalaarkorrutise kujul

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{XX_0} = ax_0 + by_0 + cz_0 + d,$$

sest punkt $X(x, y, z)$ asub tasandil.

Kauguse leidmine

Olgu $X(x, y, z)$ tasandi mingi punkt. Siis $\overrightarrow{XX_0} = (x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z)$ ja

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{XX_0} = a(x_0 - x) + b(y_0 - y) + c(z_0 - z),$$

kus $\vec{n} = (a, b, c)$ on tasandi normaalvektor.

Avades sulud ja kasutades tasandi üldvõrrandit , saame skalaarkorrutise kujul

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{XX_0} = ax_0 + by_0 + cz_0 + d,$$

sest punkt $X(x, y, z)$ asub tasandil.

Kauguse leidmine

Olgu $X(x, y, z)$ tasandi mingi punkt. Siis $\overrightarrow{XX_0} = (x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z)$ ja

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{XX_0} = a(x_0 - x) + b(y_0 - y) + c(z_0 - z),$$

kus $\vec{n} = (a, b, c)$ on tasandi normaalvektor.

Avades sulud ja kasutades tasandi üldvõrrandit , saame skalaarkorrutise kujul

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{XX_0} = ax_0 + by_0 + cz_0 + d,$$

sest punkt $X(x, y, z)$ asub tasandil.

Kauguse leidmine

Otsitavaks kauguseks on vektori $\overrightarrow{XX_0}$ projektsiooni absoluutväärtus tasandi normaalvektorile $\vec{n}$.

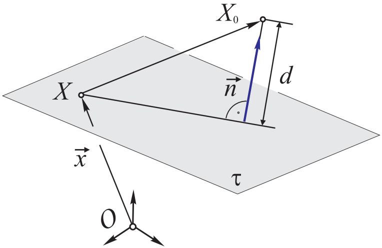


Figure : Punkti kaugus tasandist

Seega

$$d = |\, pr_{\vec{n}}\overrightarrow{XX_0}\,| = |\,\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{XX_0}}{|\vec{n}|}\,|\,.$$

Kauguse arvutamise valem

Asendades viimasesse avaldisse skalaarkorrutise ja vektori $\vec{n}$ pikkuse, saame otsitava kauguse arvutamiseks valemi

$$d = \frac{|\, ax_0 + by_0 + cz_0 + d \,|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\,.$$

Definitsioon

Punkti $X_0(x_0, y_0, z_0)$ ***hälbeks tasandist*** nimetatakse reaalarvu

$$\delta = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\,,$$

kusjuures $\delta > 0$, kui koordinaatide alguspunkt O ja punkt X_0 paiknevad ruumis tasandi suhtes erinevates poolruumides, ning $\delta < 0$, kui punktid O ja X_0 paiknevad samas poolruumis.

Kauguse arvutamise valem

Asendades viimasesse avaldisse skalaarkorrutise ja vektori $\vec{n}$ pikkuse, saame otsitava kauguse arvutamiseks valemi

$$d = \frac{|\, ax_0 + by_0 + cz_0 + d \,|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \,.$$

Definitsioon

Punkti $X_0(x_0, y_0, z_0)$ ***hälbeks tasandist*** nimetatakse reaalarvu

$$\delta = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \,,$$

kusjuures $\delta > 0$, kui koordinaatide alguspunkt O ja punkt X_0 paiknevad ruumis tasandi suhtes erinevates poolruumides, ning $\delta < 0$, kui punktid O ja X_0 paiknevad samas poolruumis.

Tasandi normaalvõrrand

Olgu tasand antud üldvõrrandiga ja $\lambda \neq 0$ mingi reaalarv. Siis võrrand

$$\lambda(ax + by + cz + d) = 0$$

on sama tasandi võrrand. Järelikult tasandi üldvõrrandi kuju ei ole üheselt määratud. Tasandi üldvõrrandi kordajate valikut saame oluliselt piirata, kui tasandi normaalvektoriks $\vec{n} = (a, b, c)$ valime ühikvektori. Selleks tuleb võrrandis valida sobivalt kordaja λ ning kasutada asjaolu, et ühikvektori koordinaatideks on suunakoosinused:

$$\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}_{\cos\alpha} x + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}_{\cos\beta} y + \underbrace{\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}_{\cos\gamma} z + \underbrace{\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}_{-p} = 0.$$

Tasandi normaalvõrrand

Olgu tasand antud üldvõrrandiga ja $\lambda \neq 0$ mingi reaalarv. Siis võrrand

$$\lambda(ax + by + cz + d) = 0$$

on sama tasandi võrrand. Järelikult tasandi üldvõrrandi kuju ei ole üheselt määratud.Tasandi üldvõrrandi kordajate valikut saame oluliselt piirata, kui tasandi normaalvektoriks $\vec{n} = (a, b, c)$ valime ühikvektori. Selleks tuleb võrrandis valida sobivalt kordaja λ ning kasutada asjaolu, et ühikvektori koordinaatideks on suunakoosinused:

$$\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}_{\cos\alpha} x + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}_{\cos\beta} y + \underbrace{\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}_{\cos\gamma} z + \underbrace{\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}_{-p} = 0.$$

Tasandi normaalvõrrand

Viimases võrrandis on veel lahtine ühikvektori suund, selle fikseerime nii, et kordaja p on positiivne, s.t

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \quad p > 0.$$

Seda Võrrandit nimetatakse ***tasandi normaalvõrrandiks*** ja selle kordajad on üheselt määratud.

Normaalvektori suund jääb lahtiseks ainult siis, kui võrrandi vabaliige $p = 0$, s.o tasand läbib koordinaatide alguspunkti.

Tasandi normaalvõrrand

Viimases võrrandis on veel lahtine ühikvektori suund, selle fikseerime nii, et kordaja p on positiivne, s.t

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \quad p > 0.$$

Seda Võrrandit nimetatakse ***tasandi normaalvõrrandiks*** ja selle kordajad on üheselt määratud.

Normaalvektori suund jääb lahtiseks ainult siis, kui võrrandi vabaliige $p = 0$, s.o tasand läbib koordinaatide alguspunkti.

Tasandi normaalvõrrand

Viimases võrrandis on veel lahtine ühikvektori suund, selle fikseerime nii, et kordaja p on positiivne, s.t

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \quad p > 0.$$

Seda Võrrandit nimetatakse ***tasandi normaalvõrrandiks*** ja selle kordajad on üheselt määratud.

Normaalvektori suund jääb lahtiseks ainult siis, kui võrrandi vabaliige $p = 0$, s.o tasand läbib koordinaatide alguspunkti.

Punkti kauguse arvutamise valem

Kasutades tasandist punkti kauguse leidmise valemit

$$d = \frac{|\, ax_0 + by_0 + cz_0 + d \,|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \, ,$$

saame, et punkti $X_0(x_0, y_0, z_0)$ kaugus tasandist normaalvõrrandi korral on

$$d = |\, x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p \,|,$$

sest $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Kui valida punktiks X_0 koordinaatide alguspunkt O, näeme, et tasandi normaalvõrrandis olev kordaja p on võrdne tasandi kaugusega koordinaatide alguspunktist.Järelikult oleme leidnud tasandi normaalvõrrandi kõikidele kordajatele geomeetrilise tähenduse.

Punkti kauguse arvutamise valem

Kasutades tasandist punkti kauguse leidmise valemit

$$d = \frac{|\, ax_0 + by_0 + cz_0 + d\, |}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\,,$$

saame, et punkti $X_0(x_0, y_0, z_0)$ kaugus tasandist normaalvõrrandi korral on

$$d = |\, x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p\, |,$$

sest $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Kui valida punktiks X_0 koordinaatide alguspunkt O, näeme, et tasandi normaalvõrrandis olev kordaja p on võrdne tasandi kaugusega koordinaatide alguspunktist. Järelikult oleme leidnud tasandi normaalvõrrandi kõikidele kordajatele geomeetrilise tähenduse.

Punkti kauguse arvutamise valem

Kasutades tasandist punkti kauguse leidmise valemit

$$d = \frac{|\,ax_0 + by_0 + cz_0 + d\,|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\,,$$

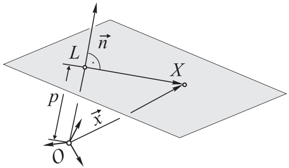
saame, et punkti $X_0(x_0, y_0, z_0)$ kaugus tasandist normaalvõrrandi korral on

$$d = |\,x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p\,|,$$

sest $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Kui valida punktiks X_0 koordinaatide alguspunkt O, näeme, et tasandi normaalvõrrandis olev kordaja p on võrdne tasandi kaugusega koordinaatide alguspunktist.Järelikult oleme leidnud tasandi normaalvõrrandi kõikidele kordajatele geomeetrilise tähenduse.

Tasandi normaalvektori suuna valimine

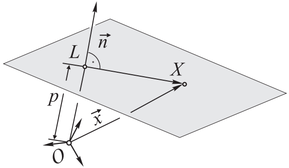


Valime tasandil vabalt punkti $X(x, y, z)$, mille kohavektoriks on $\overrightarrow{OX} = \vec{x}$. Lõigu OL pikkuseks on punkti X kohavektori $\overrightarrow{OX}$ projektsiooniskalaari absoluutväärtus tasandi normaalvektori $\vec{n}$ suunale, seega

$$OL = |pr_{\vec{n}}\vec{x}| = |\frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{|\vec{n}|}| = |x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma|.$$

Teisalt $OL = p$, sest lõigu OL pikkus võrdub koordinaatide alguspunkti kaugusega tasandist. Nõude $p > 0$ tõttu tuleb tasandi normaalvektori suund valida nii, et skalaarkorrutis $\vec{n} \cdot \vec{x} > 0$.

Tasandi normaalvektori suuna valimine

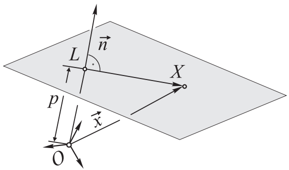


Valime tasandil vabalt punkti $X(x, y, z)$, mille kohavektoriks on $\overrightarrow{OX} = \vec{x}$.Lõigu OL pikkuseks on punkti X kohavektori $\overrightarrow{OX}$ projektsiooniskalaari absoluutväärtus tasandi normaalvektori $\vec{n}$ suunale, seega

$$OL = |pr_{\vec{n}}\vec{x}| = |\frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{|\vec{n}|}| = |x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma|.$$

Teisalt $OL = p$, sest lõigu OL pikkus võrdub koordinaatide alguspunkti kaugusega tasandist. Nõude $p > 0$ tõttu tuleb tasandi normaalvektori suund valida nii, et skalaarkorrutis $\vec{n} \cdot \vec{x} > 0$.

Tasandi normaalvektori suuna valimine



Valime tasandil vabalt punkti $X(x, y, z)$, mille kohavektoriks on $\overrightarrow{OX} = \vec{x}$.Lõigu OL pikkuseks on punkti X kohavektori $\overrightarrow{OX}$ projektsiooniskalaari absoluutväärtus tasandi normaalvektori $\vec{n}$ suunale, seega

$$OL = |pr_{\vec{n}}\vec{x}| = |\frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{|\vec{n}|}| = |x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma|.$$

Teisalt $OL = p$, sest lõigu OL pikkus võrdub koordinaatide alguspunkti kaugusega tasandist. Nõude $p > 0$ tõttu tuleb tasandi normaalvektori suund valida nii, et skalaarkorrutis $\vec{n} \cdot \vec{x} > 0$.

Iseseisev töö

6.13. Ruumigeomeetria ülesannete lahendusi vektorkujul

lk.215 - 218.