Analüütiline geomeetria

Sirge võrrandid

Mati Väljas

mati.valjas@ttu.ee
www.staff.ttu.ee/∼mvaljas
Tallinna Tehnikaülikool

April 23, 2012

Sirge definitsioon

Olgu afiinses ruumis $\mathbb{A}_3$ antud reeper $\mathfrak{R} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, mille suhtes igal punktil X on kolm koordinaati: $X(x, y, z)$.

Definitsioon

Olgu $A \in \mathbb{A}_3$ ja $\vec{s} \in \mathbb{V}_3$, $\vec{s} \neq \vec{\theta}$. Sirgeks $\mathcal{S}$, mis läbib punkti A ja mille sihivektor on $\vec{s}$, nimetatakse kõikide selliste punktide $X \in \mathbb{A}_3$ hulka, mille korral $\overrightarrow{AX} = t\vec{s}$ iga $t \in \mathbb{R}$ puhul ehk

$$\mathcal{S} = \{\, X \mid X \in \mathbb{A}_3, \quad \overrightarrow{AX} = t\,\vec{s}, \quad t \in \mathbb{R}\,\}.$$

Seega tuleb kolmemõõtmelises ruumis $\mathbb{A}_3$ määrata nende punktide koordinaadid, mis asuvad sirgel $\mathcal{S}$.

Sirge definitsioon

Olgu afiinses ruumis $\mathbb{A}_3$ antud reeper $\mathfrak{R} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, mille suhtes igal punktil X on kolm koordinaati: $X(x, y, z)$.

Definitsioon

Olgu $A \in \mathbb{A}_3$ ja $\vec{s} \in \mathbb{V}_3$, $\vec{s} \neq \vec{\theta}$. Sirgeks $\mathcal{S}$, mis läbib punkti A ja mille sihivektor on $\vec{s}$, nimetatakse kõikide selliste punktide $X \in \mathbb{A}_3$ hulka, mille korral $\overrightarrow{AX} = t\vec{s}$ iga $t \in \mathbb{R}$ puhul ehk

$$\mathcal{S} = \{X \mid X \in \mathbb{A}_3, \quad \overrightarrow{AX} = t\,\vec{s}, \quad t \in \mathbb{R}\}.$$

Seega tuleb kolmemõõtmelises ruumis $\mathbb{A}_3$ määrata nende punktide koordinaadid, mis asuvad sirgel $\mathcal{S}$.

Sirge definitsioon

Olgu afiinses ruumis $\mathbb{A}_3$ antud reeper $\mathfrak{R} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, mille suhtes igal punktil X on kolm koordinaati: $X(x, y, z)$.

Definitsioon

Olgu $A \in \mathbb{A}_3$ ja $\vec{s} \in \mathbb{V}_3$, $\vec{s} \neq \vec{\theta}$. Sirgeks $\mathcal{S}$, mis läbib punkti A ja mille sihivektor on $\vec{s}$, nimetatakse kõikide selliste punktide $X \in \mathbb{A}_3$ hulka, mille korral $\overrightarrow{AX} = t\vec{s}$ iga $t \in \mathbb{R}$ puhul ehk

$$\mathcal{S} = \{X \mid X \in \mathbb{A}_3, \quad \overrightarrow{AX} = t\,\vec{s}, \quad t \in \mathbb{R}\}.$$

Seega tuleb kolmemõõtmelises ruumis $\mathbb{A}_3$ määrata nende punktide koordinaadid, mis asuvad sirgel $\mathcal{S}$.

Sirge võrrandid

Fikseerime sellel sirgel afiinse reeperi $\{A, \vec{s}\}$, s.o ühe punkti ja vektori, mille koordinaadid ruumi $\mathbb{A}_3$ reeperi $\mathfrak{R}$ suhtes olgu $A(x_A, y_A, z_A)$ ning $\vec{s} = (s_x, s_y, s_z)$.

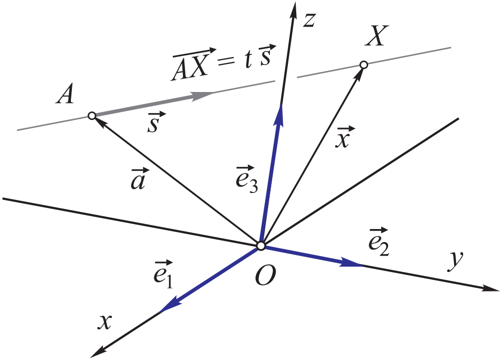

Figure : Sirge ruumis

Sirge võrrandid

Sellele sirgele (afiinsesse ruumi $\mathbb{A}_1$) kuulub iga punkt $X(x, y, z)$, mille kohavektor punkti A suhtes on kollineaarne sirge sihivektoriga $\vec{s}$, s.o $\overrightarrow{AX} = t\vec{s}$, kus reaalarvuline parameeter t on punkti X ainsaks afiinseks koordinaadiks sirgel.

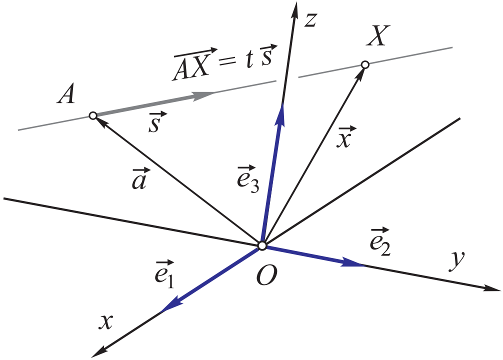

Figure : Sirge ruumis

Sirge vektorvõrrand

Afiinses ruumis $\mathbb{A}_3$ saame punkti X kohavektori $\overrightarrow{OX}$ leidmiseks kasutada kolmnurga aksioomi, seega

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX} \quad \text{ehk} \quad \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\vec{s}.$$

Tähistame $\overrightarrow{OX} = \vec{x}$ ja $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, siis saame viimase võrduse kirjutada kujul

$$\vec{x} = \vec{a} + t\vec{s}.$$

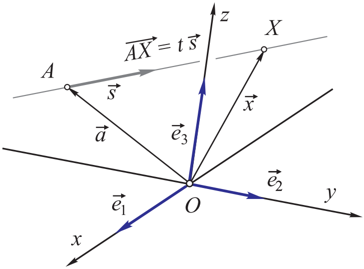

Figure : Sirge ruumis

Sirge vektorvõrrand

Võrrandit
$$\vec{x} = \vec{a} + t\vec{s}.$$
nimetatakse ***sirge vektorvõrrandiks***.

Sirge vektorvõrrandi leidmiseks on vaja teada sirgel ühe (fikseeritud) punkti kohavektorit ja sirge sihivektorit. Sirge vektorvõrrandis olevat reaalarvu $t \in \mathbb{R}$ nimetatakse ***sirge parameetriks***, seega parameetri t igale väärtusele vastab sirgel üks punkt, mille kohavektor on $\vec{x}$.

Sirge vektorvõrrand

Võrrandit

$$\vec{x} = \vec{a} + t\vec{s}.$$

nimetatakse ***sirge vektorvõrrandiks***.

Sirge vektorvõrrandi leidmiseks on vaja teada sirgel ühe (fikseeritud) punkti kohavektorit ja sirge sihivektorit. Sirge vektorvõrrandis olevat reaalarvu $t \in \mathbb{R}$ nimetatakse ***sirge parameetriks***, seega parameetri t igale väärtusele vastab sirgel üks punkt, mille kohavektor on $\vec{x}$.

Sirge parameetrilised võrrandid

Kolmemõõtmelise afiinse ruumi reeperi $\mathfrak{R}$ suhtes avalduvad punktide A ja X kohavektorid ning sirge sihivektor $\vec{s}$ järgmiselt:

$$\begin{aligned}
\vec{a} = \overrightarrow{OA} &= x_A\vec{e}_1 + y_A\vec{e}_2 + z_A\vec{e}_3, \\
\vec{x} = \overrightarrow{OX} &= x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3, \\
\vec{s} &= x_S\vec{e}_1 + y_S\vec{e}_2 + z_S\vec{e}_3.
\end{aligned}$$

Asendame need sirge vektorvõrrandisse, saame

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = (x_A\vec{e}_1 + y_A\vec{e}_2 + z_A\vec{e}_3) + t(x_S\vec{e}_1 + y_S\vec{e}_2 + z_S\vec{e}_3).$$

Viime kõik liikmed vasakule poole võrdusmärki ja rühmitame baasivektorite järgi. Saame lineaarse seose

$$(x - x_A - tx_S)\vec{e}_1 + (y - y_A - ty_S)\vec{e}_2 + (z - z_A - tz_S)\vec{e}_3 = \vec{0},$$

millest baasivektorite lineaarse sõltumatuse tõttu peavad kõik sulgavaldised võrduma nulliga.

Sirge parameetrilised võrrandid

Kolmemõõtmelise afiinse ruumi reeperi $\mathfrak{R}$ suhtes avalduvad punktide A ja X kohavektorid ning sirge sihivektor $\vec{s}$ järgmiselt:

$$\begin{aligned}
\vec{a} = \overrightarrow{OA} &= x_A\vec{e}_1 + y_A\vec{e}_2 + z_A\vec{e}_3,\\
\vec{x} = \overrightarrow{OX} &= x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3,\\
\vec{s} &= x_S\vec{e}_1 + y_S\vec{e}_2 + z_S\vec{e}_3.
\end{aligned}$$

Asendame need sirge vektorvõrrandisse, saame

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = (x_A\vec{e}_1 + y_A\vec{e}_2 + z_A\vec{e}_3) + t(x_S\vec{e}_1 + y_S\vec{e}_2 + z_S\vec{e}_3).$$

Viime kõik liikmed vasakule poole võrdusmärki ja rühmitame baasivektorite järgi. Saame lineaarse seose

$$(x - x_A - tx_S)\vec{e_1} + (y - y_A - ty_S)\vec{e_2} + (z - z_A - tz_S)\vec{e_3} = \vec{\theta},$$

millest baasivektorite lineaarse sõltumatuse tõttu peavad kõik sulgavaldised võrduma nulliga.

Sirge parameetrilised võrrandid

Kolmemõõtmelise afiinse ruumi reeperi $\mathfrak{R}$ suhtes avalduvad punktide A ja X kohavektorid ning sirge sihivektor $\vec{s}$ järgmiselt:

$$\begin{aligned}
\vec{a} = \overrightarrow{OA} &= x_A\vec{e}_1 + y_A\vec{e}_2 + z_A\vec{e}_3, \\
\vec{x} = \overrightarrow{OX} &= x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3, \\
\vec{s} &= x_s\vec{e}_1 + y_s\vec{e}_2 + z_s\vec{e}_3.
\end{aligned}$$

Asendame need sirge vektorvõrrandisse, saame

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = (x_A\vec{e}_1 + y_A\vec{e}_2 + z_A\vec{e}_3) + t(x_s\vec{e}_1 + y_s\vec{e}_2 + z_s\vec{e}_3).$$

Viime kõik liikmed vasakule poole võrdusmärki ja rühmitame baasivektorite järgi. Saame lineaarse seose

$$(x - x_A - tx_s)\vec{e}_1 + (y - y_A - ty_s)\vec{e}_2 + (z - z_A - tz_s)\vec{e}_3 = \vec{\theta},$$

millest baasivektorite lineaarse sõltumatuse tõttu peavad kõik sulgavaldised võrduma nulliga.

Sirge parameetrilised ja kanoonilised võrrandid

Nendest võrdustest saamegi **sirge parameetrilised võrrandid**

$$\begin{cases} x = x_A + tx_S, \\ y = y_A + ty_S, \\ z = z_A + tz_S. \end{cases}$$

Avaldades selle süsteemi igast võrrandist parameetri t, saadame võrdused

$$\frac{x - x_A}{x_S} = \frac{y - y_A}{y_S} = \frac{z - z_A}{z_S}.$$

Neid võrrandeid nimetatakse sirge **kanoonilisteks võrranditeks**. Kanoonilistes võrrandites olevaid murde tuleb vaadelda suhetena ja seetõttu võib mõne murru nimetajas olla null (sirge sihivektori mõni koordinaat võib olla võrdne nulliga). Sirge sihivektori $\vec{s}$ kõik koordinaadid ei saa korraga olla nullid, sest see on ühemõõtmelise afiinse ruumi $\mathbb{A}_1$ reeperi $\{A, \vec{s}\}$ vektor.

Sirge parameetrilised ja kanoonilised võrrandid

Nendest võrdustest saamegi **sirge parameetrilised võrrandid**

$$\begin{cases} x = x_A + tx_S, \\ y = y_A + ty_S, \\ z = z_A + tz_S. \end{cases}$$

Avaldades selle süsteemi igast võrrandist parameetri t, saadame võrdused

$$\frac{x - x_A}{x_S} = \frac{y - y_A}{y_S} = \frac{z - z_A}{z_S}.$$

Neid võrrandeid nimetatakse sirge **kanoonilisteks võrranditeks**. Kanoonilistes võrrandites olevaid murde tuleb vaadelda suhetena ja seetõttu võib mõne murru nimetajas olla null (sirge sihivektori mõni koordinaat võib olla võrdne nulliga). Sirge sihivektori $\vec{s}$ kõik koordinaadid ei saa korraga olla nullid, sest see on ühemõõtmelise afiinse ruumi $\mathbb{A}_1$ reeperi $\{A, \vec{s}\}$ vektor.

Sirge parameetrilised ja kanoonilised võrrandid

Nendest võrdustest saamegi **sirge parameetrilised võrrandid**

$$\begin{cases} x = x_A + tx_S, \\ y = y_A + ty_S, \\ z = z_A + tz_S. \end{cases}$$

Avaldades selle süsteemi igast võrrandist parameetri t, saadame võrdused

$$\frac{x - x_A}{x_S} = \frac{y - y_A}{y_S} = \frac{z - z_A}{z_S}.$$

Neid võrrandeid nimetatakse sirge **kanoonilisteks võrranditeks**. Kanoonilistes võrrandites olevaid murde tuleb vaadelda suhetena ja seetõttu võib mõne murru nimetajas olla null (sirge sihivektori mõni koordinaat võib olla võrdne nulliga). Sirge sihivektori $\vec{s}$ kõik koordinaadid ei saa korraga olla nullid, sest see on ühemõõtmelise afiinse ruumi $\mathbb{A}_1$ reeperi $\{A, \vec{s}\}$ vektor.

Sirge võrrand läbi kahe punkti

Kahte punkti $A(x_A, y_A, z_A)$ ja $B(x_B, y_B, z_B)$ läbiva sirge kanoonilised võrrandid on

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A},$$

kus sirge sihivektor $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$.

Analoogiliselt saab punktide A ja B kaudu leida sirge parameetrilised võrrandid

$$\begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A), \\ y = y_A + t(y_B - y_A), \\ z = z_A + t(z_B - z_A). \end{cases}$$

Sirge võrrand läbi kahe punkti

Kahte punkti $A(x_A, y_A, z_A)$ ja $B(x_B, y_B, z_B)$ läbiva sirge kanoonilised võrrandid on

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A},$$

kus sirge sihivektor $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$.

Analoogiliselt saab punktide A ja B kaudu leida sirge parameetrilised võrrandid

$$\begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A), \\ y = y_A + t(y_B - y_A), \\ z = z_A + t(z_B - z_A). \end{cases}$$

Sirge võrrand läbi kahe punkti

Kahte punkti $A(x_A, y_A, z_A)$ ja $B(x_B, y_B, z_B)$ läbiva sirge kanoonilised võrrandid on

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A},$$

kus sirge sihivektor $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$.

Analoogiliselt saab punktide A ja B kaudu leida sirge parameetrilised võrrandid

$$\begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A), \\ y = y_A + t(y_B - y_A), \\ z = z_A + t(z_B - z_A). \end{cases}$$

Sirge üldvõrrand

Sirge kanoonilised võrrandid saame kirjutada kujul

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_A}{x_s} = \dfrac{y - y_A}{y_s}, \\ \dfrac{x - x_A}{x_s} = \dfrac{z - z_A}{z_s}, \end{cases}$$

mis on kahest lineaarvõrrandist koosnev võrrandisüsteem.

Selle süsteemi saab lineaartehete abil teisendada temaga ekvivalentseks võrrandisüsteemiks

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases}$$

Neid võrrandeid nimetatakse ***sirge üldvõrranditeks***.

Sirge üldvõrrand

Sirge kanoonilised võrrandid saame kirjutada kujul

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_A}{x_S} = \dfrac{y - y_A}{y_S}, \\ \dfrac{x - x_A}{x_S} = \dfrac{z - z_A}{z_S}, \end{cases}$$

mis on kahest lineaarvõrrandist koosnev võrrandisüsteem.

Selle süsteemi saab lineaartehete abil teisendada temaga ekvivalentseks võrrandisüsteemiks

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases}$$

Neid võrrandeid nimetatakse ***sirge üldvõrranditeks***.

Sirge võrrandite sõltuvus ruumi mõõtmest

Märgime, et sirge vektorvõrrand

$$\vec{x} = \vec{a} + t\vec{s}.$$

ei sõltu afiinse ruumi mõõtmest.

Parameetriliste ja kanooniliste võrrandite liikmete arv on võrdne ruumi mõõtmega.

Näiteks afiinsel tasandil sirge, mille sihivektor on $\vec{s} = (s_x, s_y)$ ja läbib punkti $A(x_A, y_A)$, parameetrilised võrrandid on kujul

$$\begin{cases} x = x_A + tx_S, \\ y = y_A + ty_S, \end{cases}$$

millest saame selle sirge kanoonilise võrrandi

$$\frac{x - x_A}{x_S} = \frac{y - y_A}{y_S}.$$

Sirge võrrandite sõltuvus ruumi mõõtmest

Märgime, et sirge vektorvõrrand

$$\vec{x} = \vec{a} + t\vec{s}.$$

ei sõltu afiinse ruumi mõõtmest.

Parameetriliste ja kanooniliste võrrandite liikmete arv on võrdne ruumi mõõtmega.

Näiteks afiinsel tasandil sirge, mille sihivektor on $\vec{s} = (s_x, s_y)$ ja läbib punkti $A(x_A, y_A)$, parameetrilised võrrandid on kujul

$$\begin{cases} x = x_A + tx_S, \\ y = y_A + ty_S, \end{cases}$$

millest saame selle sirge kanoonilise võrrandi

$$\frac{x - x_A}{x_S} = \frac{y - y_A}{y_S}.$$

Sirge võrrandite sõltuvus ruumi mõõtmest

Märgime, et sirge vektorvõrrand

$$\vec{x} = \vec{a} + t\vec{s}.$$

ei sõltu afiinse ruumi mõõtmest.

Parameetriliste ja kanooniliste võrrandite liikmete arv on võrdne ruumi mõõtmega.

Näiteks afiinsel tasandil sirge, mille sihivektor on $\vec{s} = (s_x, s_y)$ ja läbib punkti $A(x_A, y_A)$, parameetrilised võrrandid on kujul

$$\begin{cases} x = x_A + tx_S, \\ y = y_A + ty_S, \end{cases}$$

millest saame selle sirge kanoonilise võrrandi

$$\frac{x - x_A}{x_S} = \frac{y - y_A}{y_S}.$$

Sirge võrrandite sõltuvus ruumi mõõtmest

Märgime, et sirge vektorvõrrand

$$\vec{x} = \vec{a} + t\vec{s}.$$

ei sõltu afiinse ruumi mõõtmest.

Parameetriliste ja kanooniliste võrrandite liikmete arv on võrdne ruumi mõõtmega.

Näiteks afiinsel tasandil sirge, mille sihivektor on $\vec{s} = (s_x, s_y)$ ja läbib punkti $A(x_A, y_A)$, parameetrilised võrrandid on kujul

$$\begin{cases} x = x_A + tx_s, \\ y = y_A + ty_s, \end{cases}$$

millest saame selle sirge kanoonilise võrrandi

$$\frac{x - x_A}{x_s} = \frac{y - y_A}{y_s}.$$