Analüütiline geomeetria

Tasandi võrrandid

Mati Väljas

mati.valjas@ttu.ee
www.staff.ttu.ee/∼mvaljas
Tallinna Tehnikaülikool

April 23, 2012

Tasandi võrrandid ruumis

Olgu afiinses ruumis $\mathbb{A}_3$ on antud reeper $\mathfrak{R} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, mille suhtes on igal punktil kolm koordinaati $X(x, y, z)$.
Vaatleme selles afiinses ruumis kahemõõtmelist afiinset alamruumi ehk tasandit.

Definitsioon

Olgu $A \in \mathbb{A}_3$ ja $\vec{s}_1, \vec{s}_2 \in \mathbb{V}_3$, $\vec{s}_1 \nparallel \vec{s}_2$. Tasandiks $\mathcal{T}$, mis läbib punkti A ja mille rihivektorid on $\vec{s}_1$ ning $\vec{s}_2$, nimetatakse kõikide selliste punktide $X \in \mathbb{A}_3$ hulka, mille korral $\overrightarrow{AX} = t_1\vec{s}_1 + t_2\vec{s}_2$ iga $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ ehk

$$\mathcal{T} = \{ X \mid X \in \mathbb{A}_3, \quad \overrightarrow{AX} = t_1\vec{s}_1 + t_2\vec{s}_2, \quad \forall t_1 \in \mathbb{R}, \forall t_2 \in \mathbb{R} \}.$$

Tasandi võrrandid ruumis

Olgu afiinses ruumis $\mathbb{A}_3$ on antud reeper $\mathfrak{R} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, mille suhtes on igal punktil kolm koordinaati $X(x, y, z)$. Vaatleme selles afiinses ruumis kahemõõtmelist afiinset alamruumi ehk tasandit.

Definitsioon

Olgu $A \in \mathbb{A}_3$ ja $\vec{s}_1, \vec{s}_2 \in \mathbb{V}_3$, $\vec{s}_1 \nparallel \vec{s}_2$. Tasandiks $\mathcal{T}$, mis läbib punkti A ja mille rihivektorid on $\vec{s}_1$ ning $\vec{s}_2$, nimetatakse kõikide selliste punktide $X \in \mathbb{A}_3$ hulka, mille korral $\overrightarrow{AX} = t_1\vec{s}_1 + t_2\vec{s}_2$ iga $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ ehk

$$\mathcal{T} = \{ X \mid X \in \mathbb{A}_3, \quad \overrightarrow{AX} = t_1\vec{s}_1 + t_2\vec{s}_2, \quad \forall t_1 \in \mathbb{R}, \forall t_2 \in \mathbb{R} \}.$$

Tasandi võrrandid ruumis

Püüame kolmemõõtmelises ruumis $\mathbb{A}_3$ määrata nende punktide koordinaadid, mis asuvad tasandil $\mathcal{T}$. Fikseerime antud tasandil afiinse reeperi $\{A, \vec{s}_1, \vec{s}_2\}$, s.o ühe punkti ja kaks mittekollineaarset vektorit.

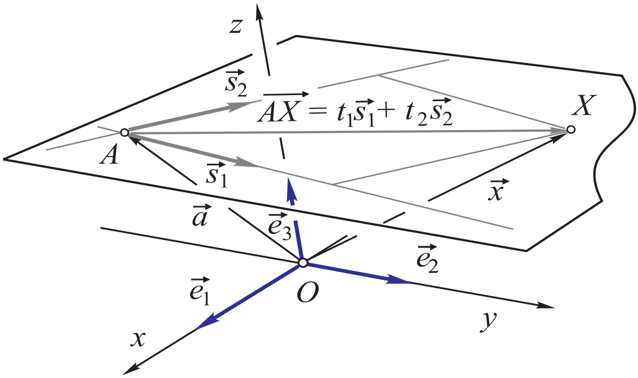


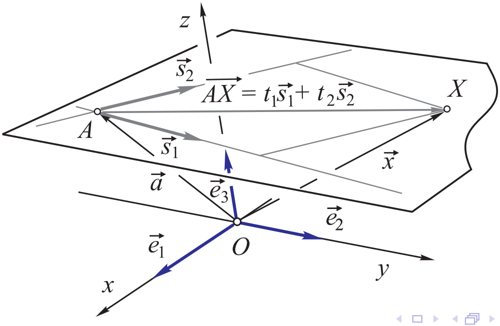
Figure : Tasand ruumis

Tasandi võrrandid ruumis

Tasandi definitsiooni kohaselt peab tasandi iga punkti X kohavektor reeperi $\{A, \vec{s}_1, \vec{s}_2\}$ alguspunkti A suhtes avalduma rihivektorite lineaarkombinatsioonina, s.o

$$\overrightarrow{AX} = t_1\vec{s}_1 + t_2\vec{s}_2,$$

kus t_1 ja t_2 on reaalarvulised parameetrid, mis iseloomustavad punkti X asukohta tasandil, s.t reaalarvude paar (t_1, t_2) on punkti X koordinaadid tasandil oleva reeperi $\{A, \vec{s}_1, \vec{s}_2\}$ suhtes.



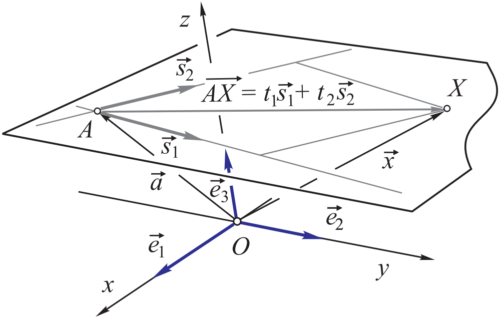
Tasandi võrrandid ruumis

Afiinses ruumis $\mathbb{A}_3$ saame punkti X kohavektori $\overrightarrow{OX}$ leidmiseks kasutada kolmnurga aksioomi (vt joonis), seega

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX} \quad \text{ehk} \quad \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t_1\vec{s}_1 + t_2\vec{s}_2.$$

Tähistades $\overrightarrow{OX} = \vec{x}$ ja $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, saame viimase võrduse kirjutada kujul

$$\vec{x} = \vec{a} + t_1\vec{s}_1 + t_2\vec{s}_2.$$



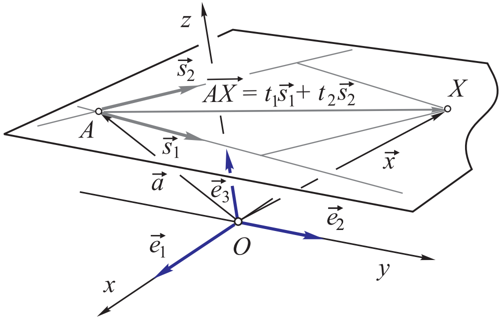
Tasandi võrrandid ruumis

Afiinses ruumis $\mathbb{A}_3$ saame punkti X kohavektori $\overrightarrow{OX}$ leidmiseks kasutada kolmnurga aksioomi (vt joonis), seega

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX} \quad \text{ehk} \quad \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t_1\vec{s}_1 + t_2\vec{s}_2.$$

Tähistades $\overrightarrow{OX} = \vec{x}$ ja $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, saame viimase võrduse kirjutada kujul

$$\vec{x} = \vec{a} + t_1\vec{s}_1 + t_2\vec{s}_2.$$



Tasandi vektorvõrrand

Leitud võrrandit

$$\vec{x} = \vec{a} + t_1\vec{s}_1 + t_2\vec{s}_2.$$

nimetatakse ***tasandi vektorvõrrandiks***. Tasandi vektorvõrrandi leidmiseks on vaja teada tasandil ühe (fikseeritud) punkti kohavektorit ja kahte tasandi rihivektorit.

Tasandi vektorvõrrandis olevaid reaalarve $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ nimetatakse ***tasandi parameetriteks***. Igale parameetrite komplektile (t_1, t_2) vastab tasandil üks punkt, mille kohavektor on $\vec{x}$.

Tasandi vektorvõrrand

Leitud võrrandit

$$\vec{x} = \vec{a} + t_1\vec{s}_1 + t_2\vec{s}_2.$$

nimetatakse ***tasandi vektorvõrrandiks***. Tasandi vektorvõrrandi leidmiseks on vaja teada tasandil ühe (fikseeritud) punkti kohavektorit ja kahte tasandi rihivektorit.

Tasandi vektorvõrrandis olevaid reaalarve $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ nimetatakse ***tasandi parameetriteks***. Igale parameetrite komplektile (t_1, t_2) vastab tasandil üks punkt, mille kohavektor on $\vec{x}$.

Tasandi parameetrilised võrrandid

Olgu antud punkti ja rihivektorite koordinaadid ruumi $\mathbb{A}_3$ reeperi $\mathfrak{R}$ suhtes

$$A(x_A, y_A, z_A), \quad \vec{s_1} = (s_{1x}, s_{1y}, s_{1z}), \quad \vec{s_2} = (s_{2x}, s_{2y}, s_{2z}).$$

Asendame vektorid

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AX} &= (x - x_A)\vec{e_1} + (y - y_A)\vec{e_2} + (z - z_A)\vec{e_3}, \\
\vec{s_1} &= s_{1x}\vec{e_1} + s_{1y}\vec{e_2} + s_{1z}\vec{e_3}, \\
\vec{s_2} &= s_{2x}\vec{e_1} + s_{2y}\vec{e_2} + s_{2z}\vec{e_3}
\end{aligned}$$

tasandi vektorvõrrandisse, viime kõik liikmed võrdusmärgi vasakule poole ja rühmitame baasivektorite järgi.

Tasandi parameetrilised võrrandid

Baasivektorite lineaarse sõltumatuse tõttu peavad kõik selle lineaarkombinatsiooni kordajad olema nullid. Tekkinud tingimustest saame kolm võrrandit:

$$\begin{cases} x = x_A + t_1 s_{1x} + t_2 s_{2x}\,, \\ y = y_A + t_1 s_{1y} + t_2 s_{2y}\,, \\ z = z_A + t_1 s_{1z} + t_2 s_{2z}\,. \end{cases}$$

Võrrandeid nimetatakse ***tasandi parameetrilisteks võrranditeks***.

Tasandi üldvõrrand

Vaatame veelkord tasandi definitsioonis olevat avaldist $\overrightarrow{AX} = t_1\vec{s_1} + t_2\vec{s_2}$. Vektorid $\overrightarrow{AX}$, $\vec{s_1}$ ja $\vec{s_2}$ komplanaarsed. Vastavalt vektorite komplanaarsuse tingimusele, moodustame kolmandat järku determinandi, mille esimeses reas on vektori $\overrightarrow{AX}$, teises ja kolmandas aga rihivektorite koordinaadid:

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ s_{1x} & s_{1y} & s_{1z} \\ s_{2x} & s_{2y} & s_{2z} \end{vmatrix} = 0.$$

Arendades seda determinanti esimese rea järgi, saame ühe lineaarse võrrandi

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0,$$

kus $a = \begin{vmatrix} s_{1y} & s_{1z} \\ s_{2y} & s_{2z} \end{vmatrix}$, $b = -\begin{vmatrix} s_{1x} & s_{1z} \\ s_{2x} & s_{2z} \end{vmatrix}$ ja $c = \begin{vmatrix} s_{1x} & s_{1y} \\ s_{2x} & s_{2y} \end{vmatrix}$.

Tasandi üldvõrrand

Vaatame veelkord tasandi definitsioonis olevat avaldist $\overrightarrow{AX} = t_1\vec{s_1} + t_2\vec{s_2}$. Vektorid $\overrightarrow{AX}$, $\vec{s_1}$ ja $\vec{s_2}$ komplanaarsed.

Vastavalt vektorite komplanaarsuse tingimusele, moodustame kolmandat järku determinandi, mille esimeses reas on vektori $\overrightarrow{AX}$, teises ja kolmandas aga rihivektorite koordinaadid:

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ s_{1x} & s_{1y} & s_{1z} \\ s_{2x} & s_{2y} & s_{2z} \end{vmatrix} = 0.$$

Arendades seda determinanti esimese rea järgi, saame ühe lineaarse võrrandi

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0,$$

kus $a = \begin{vmatrix} s_{1y} & s_{1z} \\ s_{2y} & s_{2z} \end{vmatrix}$, $b = -\begin{vmatrix} s_{1x} & s_{1z} \\ s_{2x} & s_{2z} \end{vmatrix}$ ja $c = \begin{vmatrix} s_{1x} & s_{1y} \\ s_{2x} & s_{2y} \end{vmatrix}$.

Tasandi üldvõrrand

Vaatame veelkord tasandi definitsioonis olevat avaldist $\overrightarrow{AX} = t_1\vec{s_1} + t_2\vec{s_2}$. Vektorid $\overrightarrow{AX}$, $\vec{s_1}$ ja $\vec{s_2}$ komplanaarsed. Vastavalt vektorite komplanaarsuse tingimusele, moodustame kolmandat järku determinandi, mille esimeses reas on vektori $\overrightarrow{AX}$, teises ja kolmandas aga rihivektorite koordinaadid:

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ s_{1x} & s_{1y} & s_{1z} \\ s_{2x} & s_{2y} & s_{2z} \end{vmatrix} = 0.$$

Arendades seda determinanti esimese rea järgi, saame ühe lineaarse võrrandi

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0,$$

kus $a = \begin{vmatrix} s_{1y} & s_{1z} \\ s_{2y} & s_{2z} \end{vmatrix}$, $b = -\begin{vmatrix} s_{1x} & s_{1z} \\ s_{2x} & s_{2z} \end{vmatrix}$ ja $c = \begin{vmatrix} s_{1x} & s_{1y} \\ s_{2x} & s_{2y} \end{vmatrix}$.

Tasandi üldvõrrand

Vaatame veelkord tasandi definitsioonis olevat avaldist $\overrightarrow{AX} = t_1\vec{s_1} + t_2\vec{s_2}$. Vektorid $\overrightarrow{AX}$, $\vec{s_1}$ ja $\vec{s_2}$ komplanaarsed. Vastavalt vektorite komplanaarsuse tingimusele, moodustame kolmandat järku determinandi, mille esimeses reas on vektori $\overrightarrow{AX}$, teises ja kolmandas aga rihivektorite koordinaadid:

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ s_{1x} & s_{1y} & s_{1z} \\ s_{2x} & s_{2y} & s_{2z} \end{vmatrix} = 0.$$

Arendades seda determinanti esimese rea järgi, saame ühe lineaarse võrrandi

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0,$$

kus $a = \begin{vmatrix} s_{1y} & s_{1z} \\ s_{2y} & s_{2z} \end{vmatrix}$, $b = -\begin{vmatrix} s_{1x} & s_{1z} \\ s_{2x} & s_{2z} \end{vmatrix}$ ja $c = \begin{vmatrix} s_{1x} & s_{1y} \\ s_{2x} & s_{2y} \end{vmatrix}$.

Tasandi üldvõrrand

Selle võrrandi saame kirjutada kujul

$$ax + by + cz + d = 0,$$

kus $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$. Seda võrrandit nimetatakse ***tasandi üldvõrrandiks***.