Eukleidilised ruumid

Ortogonaalsed vektorite süsteemid. Ristbaas

Mati Väljas

mati.valjas@ttu.ee

Tallinna Tehnikaülikool

Ortogonaalsete vektorite süsteem

Def. Öeldakse, et vektorid $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ moodustavad ***ortogonaalsete vektorite süsteemi***, kui

$$\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = 0 \quad \text{iga} \quad i, j = 1, 2, \ldots, m.$$

Ortogonaalsete vektorite süsteem

Def. Öeldakse, et vektorid $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ moodustavad ***ortogonaalsete vektorite süsteemi***, kui

$$\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = 0 \quad \text{iga} \quad i, j = 1, 2, \ldots, m.$$

Lause. Ortogonaalsesse vektorite süsteemi, mis ei sisalda nullvektorit, kuuluvad vektorid on lineaarselt sõltumatud.

Ortogonaalsete vektorite süsteem

Def. Öeldakse, et vektorid $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ moodustavad ***ortogonaalsete vektorite süsteemi***, kui

$$\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = 0 \quad \text{iga} \quad i, j = 1, 2, \ldots, m.$$

Lause. Ortogonaalsesse vektorite süsteemi, mis ei sisalda nullvektorit, kuuluvad vektorid on lineaarselt sõltumatud.

Tõestus. Moodustagu vektorid $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ ortogonaalse vektorite süsteemi, mis ei sisalda nullvektorit.

Ortogonaalsete vektorite süsteem

Def. Öeldakse, et vektorid $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ moodustavad ***ortogonaalsete vektorite süsteemi***, kui

$$\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = 0 \quad \text{iga} \quad i, j = 1, 2, \ldots, m.$$

Lause. Ortogonaalsesse vektorite süsteemi, mis ei sisalda nullvektorit, kuuluvad vektorid on lineaarselt sõltumatud.

Tõestus. Moodustagu vektorid $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ ortogonaalse vektorite süsteemi, mis ei sisalda nullvektorit.

Uurime, millistel tingimustel nendest vektoritest moodustatud lineaarne kombinatsioon esitab nullvektrori, so

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \ldots + \lambda_{k-1}\vec{a}_{k-1} + \lambda_k\vec{a}_k + \lambda_{k+1}\vec{a}_{k+1} + \ldots + \lambda_m\vec{a}_m = \vec{\theta}.$$

Ortogonaalsete vektorite süsteem

$$\lambda_1 \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_k + \ldots + \lambda_{k-1} \vec{a}_{k-1} \cdot \vec{a}_k + \lambda_k \vec{a}_k \cdot \vec{a}_k + \lambda_{k+1} \vec{a}_{k+1} \cdot \vec{a}_k + \ldots + \lambda_m \vec{a}_m \cdot \vec{a}_k = 0.$$

$$\lambda_k \underbrace{\vec{a}_k \cdot \vec{a}_k}_{\neq 0} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_k = 0 \quad \text{iga } k \text{ korral.}$$

Ortogonaalsete vektorite süsteem

$$\lambda_1 \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_k + \ldots + \lambda_{k-1} \vec{a}_{k-1} \cdot \vec{a}_k + \lambda_k \vec{a}_k \cdot \vec{a}_k + \lambda_{k+1} \vec{a}_{k+1} \cdot \vec{a}_k + \ldots + \lambda_m \vec{a}_m \cdot \vec{a}_k = 0.$$

$$\lambda_k \underbrace{\vec{a}_k \cdot \vec{a}_k}_{\neq 0} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_k = 0 \quad \text{iga } k \text{ korral.}$$

Seega, vaadeldav lineaarkomibatasioon esitab nullvektori ainult siis, kui see on triviaalne.

Ortogonaalsete vektorite süsteem

$$\lambda_1 \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_k + \ldots + \lambda_{k-1} \vec{a}_{k-1} \cdot \vec{a}_k + \lambda_k \vec{a}_k \cdot \vec{a}_k + \lambda_{k+1} \vec{a}_{k+1} \cdot \vec{a}_k + \ldots + \lambda_m \vec{a}_m \cdot \vec{a}_k = 0.$$

$$\lambda_k \underbrace{\vec{a}_k \cdot \vec{a}_k}_{\neq 0} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_k = 0 \quad \text{iga } k \text{ korral.}$$

Seega, vaadeldav lineaarkomibatasioon esitab nullvektori ainult siis, kui see on triviaalne.

Järeldus. Eukleidilise ruumi $\mathbb{E}_n$ ortogonaalste vektorite süsteem võib koosneda maksimaalselt n vektorist.

Ortogonaalsete vektorite süsteem

$$\lambda_1\vec{a}_1\cdot\vec{a}_k+\ldots+\lambda_{k-1}\vec{a}_{k-1}\cdot\vec{a}_k+\lambda_k\vec{a}_k\cdot\vec{a}_k+\lambda_{k+1}\vec{a}_{k+1}\cdot\vec{a}_k+\ldots+\lambda_m\vec{a}_m\cdot\vec{a}_k=0.$$

$$\lambda_k\underbrace{\vec{a}_k\cdot\vec{a}_k}_{\neq 0}=0 \qquad\Rightarrow\qquad \lambda_k=0 \quad \text{iga } k \text{ korral.}$$

Seega, vaadeldav lineaarkomibatasioon esitab nullvektori ainult siis, kui see on triviaalne.

Järeldus. Eukleidilise ruumi $\mathbb{E}_n$ ortogonaalste vektorite süsteem võib koosneda maksimaalselt n vektorist.

Lause. Eukleidilise vektoruumi igale lineaarselt sõltumatute vektorite süsteemile saab seada vastavusse ortogonaalsete vektorite süsteemi.

Ortogonaliseerimine

Näide. Konstrueerime lineaarselt sõltumatute vektorite $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ põhjal ortognaalsete vektorite süsteemi $\{\vec{f}, \vec{h}\}$. Valime vektoriks $\vec{h}$ vektori $\vec{e_1}$, seega

$$\vec{f} = \vec{e}_1.$$

Ortogonaliseerimine

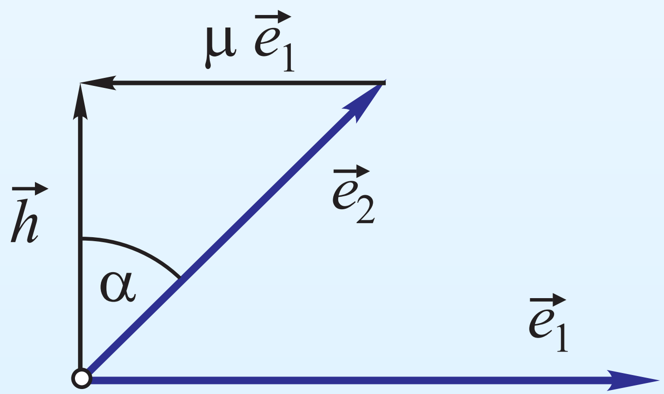
Näide. Konstrueerime lineaarselt sõltumatute vektorite $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ põhjal ortognaalsete vektorite süsteemi $\{\vec{f}, \vec{h}\}$. Valime vektoriks $\vec{h}$ vektori $\vec{e_1}$, seega

$$\vec{f} = \vec{e}_1.$$

Teise vektori $\vec{h}$ valime risti vektoriga $\vec{f} = \vec{e}_1$

$$\vec{h} = \vec{e_2} + \mu\vec{e_1}, \text{ kus } \vec{h} \perp \vec{e_1}.$$

Leiame kordaja μ selliselt, et ristumise nõue oleks täidetud.



Ortogonaliseerimine

Kuna $\vec{h} \perp \vec{e_1}$, siis

$$\vec{e_1} \cdot \vec{h} = \vec{e_1}\vec{e_2} + \mu \vec{e_1}^{\,2} = 0,$$

millest leiame kordaja $\mu = -\dfrac{\vec{e_1} \cdot \vec{e_2}}{\vec{e_1}^{\,2}}$.

Ortogonaliseerimine

Kuna $\vec{h} \perp \vec{e_1}$, siis

$$\vec{e_1} \cdot \vec{h} = \vec{e_1}\vec{e_2} + \mu\vec{e_1}^{\,2} = 0,$$

millest leiame kordaja $\mu = -\dfrac{\vec{e_1} \cdot \vec{e_2}}{\vec{e_1}^{\,2}}$.

Kasutades meetrilise maatriksi elemente, saame leitud kordaja esitada kujul $\mu = -\dfrac{g_{12}}{g_{11}}$ ja pärast selle asendamist vektori $\vec{h}$ avaldisse saame

$$\vec{h} = \frac{-g_{12}\vec{e_1} + g_{11}\vec{e_2}}{g_{11}} = \frac{1}{g_{11}} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ \vec{e_1} & \vec{e_2} \end{vmatrix}.$$

Ortogonaliseerimine

Kokkuvõtteks märgime, et eukleidilise vektorruumi lineaarselt sõltumatute vektorite süstemi ortogonaliseerimine ei ole määratud üheselt, sest siin vaadeldud protsess sõltub oluliselt baasivektorite järjestusest.

Tähtis on, et me saame ortogonaalse süsteemi alati konstrueerida.

Ristbaas

Eukleidilises vektorruumis $\mathbb{E}_n$ on võimalik defineerida sellised baasid, mille korral on skalaarkorrutise arvutamine tunduvalt lihtsam kui me seda eespool nägime.

Ristbaas

Eukleidilises vektorruumis $\mathbb{E}_n$ on võimalik defineerida sellised baasid, mille korral on skalaarkorrutise arvutamine tunduvalt lihtsam kui me seda eespool nägime.

Def. Eukleidilise vektorruumi $\mathbb{E}_n$ baasi $\mathfrak{B}^{\perp} = \{\vec{i_1}, \vec{i_2}, \ldots, \vec{i_n}\}$, mis koosneb ristuvatest ühikvektoritest, nimetatakse ***ristbaasiks***

Ristbaas

Eukleididilises vektorruumis $\mathbb{E}_n$ on võimalik defineerida sellised baasid, mille korral on skalaarkorrutise arvutamine tunduvalt lihtsam kui me seda eespool nägime.

Def. Eukleididilise vektorruumi $\mathbb{E}_n$ baasi $\mathfrak{B}^{\perp} = \{\vec{i_1}, \vec{i_2}, \ldots, \vec{i_n}\}$, mis koosneb ristuvatest ühikvektoritest, nimetatakse ***ristbaasiks***

Oletame, et vektorruumis on olemas ristbaas. Leiame sellele baasile vastava meetrilise maatriksi. Ristbaasi definitsioonis antud geomeetrilise kirjelduse järgi saame arvutada baasivektorite skalaarkorrutised $\vec{i_k} \cdot \vec{i_l} = |\vec{i_k}||\vec{i_l}| \cos \alpha$. Arvestades asjaolu, et baasivektorid on ristuvad ühikvektorid, saame

$$\vec{i_k} \cdot \vec{i_l} = \delta_{kl} = \begin{cases} 1, \text{kui } k = l, \\ 0, \text{kui } k \neq l. \end{cases}$$

Ristbaas

Vektorite

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \ldots + a_n\vec{e}_n \quad \text{ning} \quad \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + \ldots + b_n\vec{e}_n$$

skalaarkorrutis avaldub kujul

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

millest saame

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n.$$

Seega avaldub vektorite skalaarkorrutis ristbaasil vektorite vastavate koordinaatide korrutiste summana.

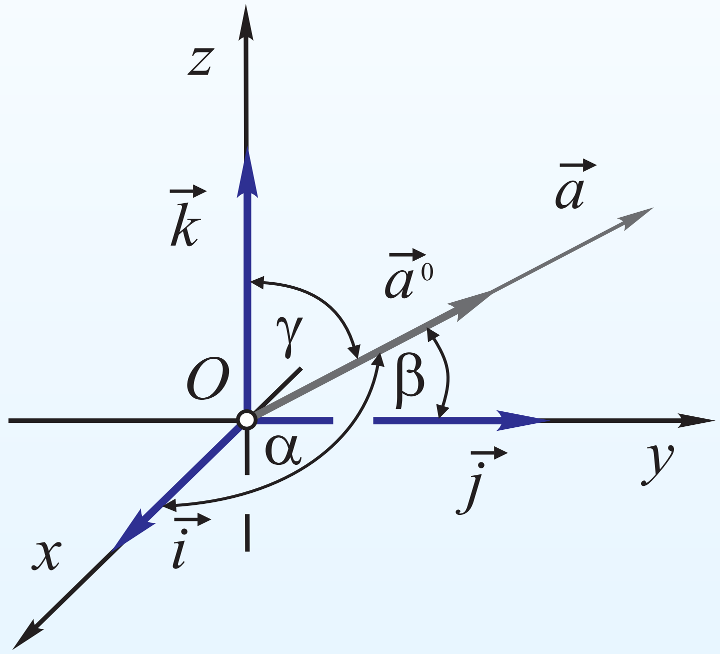
Ristbaas

Kui n-mõõtmelises eukleidilises vektorruumis on fikseeritud ristbaas ning sellel antud vektorid $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ja $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, siis saame Cauchy-Bunjakovski võrratuse kirjutada välja kujul, nagu see esineb aritmeetikas

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2).$$

Suunakoosinused

Vaatame lähemalt kolmemõõtmelist eukleidilist vektorruumi $\mathbb{E}_3$ ja selles fikseeritud ristbaasi $\mathfrak{B}^{\perp} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.



Olgu valitud reeperi suhtes antud vektor $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

Suunakoosinused

Selle vektori pikkus on $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. Vektori $\vec{a}$ suunaühikvektor on $\vec{a}^{\,0} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, mille koordinaadid on

$$\vec{a}^{\,0} = \left(\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \right).$$

Arvutame vektori $\vec{a}$ suunanurkade koosinused

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{|\vec{a}|}.$$

Suunakoosinused

Kui nendes valemites asendada vektori $\vec{a}$ pikkus ja skalaarkorrutised vastavate koordinaatkujuliste seostega, siis saame suunakoosinuste jaoks valemid

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Suunakoosinused

Kui nendes valemites asendada vektori $\vec{a}$ pikkus ja skalaarkorrutised vastavate koordinaatkujuliste seostega, siis saame suunakoosinuste jaoks valemid

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Järelikult on vektori $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ suunaühikvektori koordinaatideks selle ***vektori suunakoosinused***, s.o $\vec{a}^{\,0} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, kusjuures suunakoosinused rahuldavad tingimust

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

sest $\vec{a}^{\,0}$ on ühikvektor.

Suunakoosinused

Analoogilist mõttekäiku võime kasutada igas n-mõõtmelises eukleidilises ruumis, seejuures suunanurkade ja suunakoosinuste arv on võrdne ruumi mõõtmega. Seega, n-mõõtmelises eukleidilises ruumis on ristreeperi suhtes antud vektoril $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ n suunanurka, mille koosinused rahuldavad tingimust

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \ldots + \cos^2 \alpha_n = 1$$

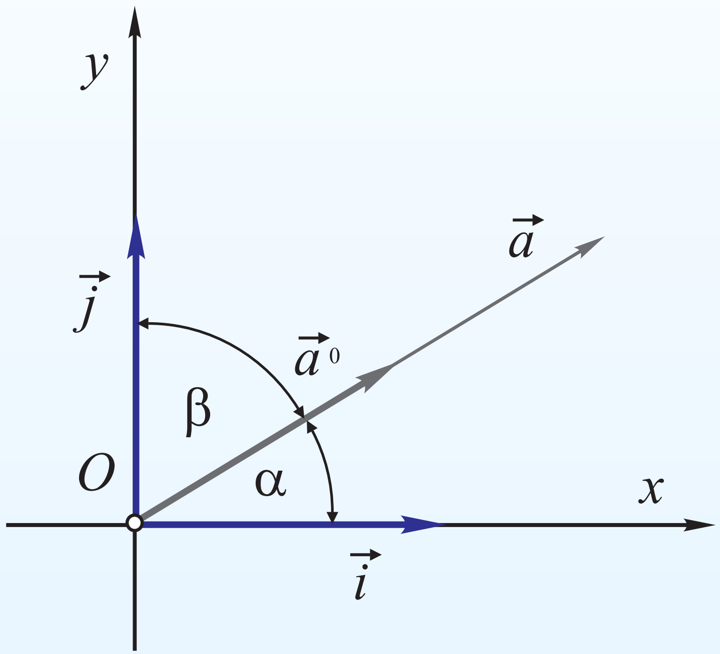
ja suunakoosinused on selle vektori suunaühikvektori koordinaatideks

$$\vec{a}^{\,0} = (\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \ldots, \cos \alpha_n).$$

Ühikvektori sihi määramiseks piisab siin samuti vaid $(n-1)$-st suunanurgast.

Suunakoosinused

Vaatame lõpuks sama olukorda kahemõõtmelises eukleidilises ruumis.



Vektori $\vec{a} = (a_x, a_y)$ suunaühikvektor on $\vec{a}^{\,0} = (\cos\alpha, \cos\beta)$, millest oluline on vaid üks suunanurk, sest $\cos\beta = \sin\alpha$.

Suunakoosinused

Seega vektori $\vec{a}$ suunaline ühikvektor ristbaasi $\mathfrak{B}^{\perp} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ suhtes on $\vec{a}^{\,0} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, kus

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \quad \text{ja} \quad \sin\alpha = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}$$

ning suunakoosinuste tingimusest saame trigonomeetria põhiseose

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$