# *Eukleidilised ruumid*

# *Eukleidiline vektorruum*

Mati Väljas

mati.valjas@ttu.ee

Tallinna Tehnikaülikool

## Skalaarkorrutis

Vektorruumi definitsioonis on määratud kaks lineaartehet – vektorite liitmine ja skalaariga (arvuga) korrutamine.

Kasutades neid tehteid, saame vektoreid rakendada erinevates matemaatika valdkondades.

Näiteks, geomeetrias on võimalik defineerida mõisteid ja lahendada ülesandeid, mis on seotud vektorite kollineaarsuse ja komplanaarsusega. Üldisemalt, vektorite lineaarse sõltuvuse ja lineaarse sõltumatusega.

Geomeetrias on palju selliseid ülesandeid, mida ei ole võimalik lahendada ainult vektorruumi lineaartehete abil. Seetõttu defineerime vektorruumis veel ühe tehte.

## Skalaarkorrutis

***Def.*** Öeldakse, et vektorruumis $\mathbb{V}$ on määratud ***vektorite skalaarkorrutamine***, kui selle vektorruumi igale kahele vektorile on seatud vastavusse reaalarv, s.t

$$\forall \vec{a} \in \mathbb{V}, \forall \vec{b} \in \mathbb{V} \ \ \exists! \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{nii, et} \quad \alpha = \vec{a} \cdot \vec{b},$$

mida nimetatakse nende vektorite ***skalaarkorrutiseks***.

## Skalaarkorrutis

***Def.*** Öeldakse, et vektorruumis $\mathbb{V}$ on määratud ***vektorite skalaarkorrutamine***, kui selle vektorruumi igale kahele vektorile on seatud vastavusse reaalarv, s.t

$$\forall \vec{a} \in \mathbb{V}, \forall \vec{b} \in \mathbb{V} \ \ \exists! \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{nii, et} \quad \alpha = \vec{a} \cdot \vec{b},$$

mida nimetatakse nende vektorite ***skalaarkorrutiseks***.
Seejuures peavad olema täidetud tingimused:

1. $\forall \vec{a} \in \mathbb{V}, \forall \vec{b} \in \mathbb{V}$ korral $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (kommutatiivsus);
2. $\forall \vec{a} \in \mathbb{V}, \forall \vec{b} \in \mathbb{V}, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ korral $\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \lambda \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \lambda \, \vec{b}$ (assotsiatiivsus arvuga korrutamise suhtes);
3. $\forall \vec{a} \in \mathbb{V}, \forall \vec{b} \in \mathbb{V}, \forall \vec{c} \in \mathbb{V}$ korral $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (distributiivsus);
4. $\forall \vec{a} \in \mathbb{V}$ korral $\vec{a}^{\,2} = \vec{a} \cdot \vec{a} \begin{cases} > 0, & \text{kui } \vec{a} \neq \vec{\theta}, \\ = 0, & \text{kui } \vec{a} = \vec{\theta} \end{cases}$ (positiivsus).

# Eukleidiline vektorruum

Selle definitsiooni tingimused 2) ja 3) saame võtta kokku järgmiselt:

$$\forall \vec{a} \in \mathbb{V}, \forall \vec{b} \in \mathbb{V}, \forall \vec{c} \in \mathbb{V}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mu \in \mathbb{R} \quad \text{korral}$$

$$(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) \cdot \vec{c} = \lambda \vec{a} \cdot \vec{c} + \mu \vec{b} \cdot \vec{c}$$

Seda tingimust nimetatakse ***lineaarsuseks***. Järelikult vektorite skalaarkorrutamine on lineaarne tehe.

## Eukleidiline vektorruum

Selle definitsiooni tingimused 2) ja 3) saame võtta kokku järgmiselt:

$$\forall \vec{a} \in \mathbb{V}, \forall \vec{b} \in \mathbb{V}, \forall \vec{c} \in \mathbb{V}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mu \in \mathbb{R} \quad \text{korral}$$

$$(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) \cdot \vec{c} = \lambda \vec{a} \cdot \vec{c} + \mu \vec{b} \cdot \vec{c}$$

Seda tingimust nimetatakse ***lineaarsuseks***. Järelikult vektorite skalaarkorrutamine on lineaarne tehe.

***Def.*** Vektorruumi üle reaalarvude korpuse, milles on defineeritud skalaarkorrutamine, nimetatakse ***eukleidiliseks***[a] ***vektorruumiks***.
Eukleidilist vektorruumi tähistatakse sümboliga $\mathbb{E}$.

[a] Eukleides (u 365—u 300 eKr) — kreeka matemaatik. Tähtsaimas teoses "Elemendid" esitas ta esimese elementaargeomeetria aksiomaatilise süsteemi.

## Eukleidiline vektorruum

Rõhutame, et eukleidilises vektorruumis $\mathbb{E}$ kehtivad kõik varem sõnastatud definitsioonid, teoreemid ja laused, sest vastavalt definitsioonile on $\mathbb{E}$ vektorruumi struktuuriga.

## Eukleidiline vektorruum

Rõhutame, et eukleidilises vektorruumis $\mathbb{E}$ kehtivad kõik varem sõnastatud definitsioonid, teoreemid ja laused, sest vastavalt definitsioonile on $\mathbb{E}$ vektorruumi struktuuriga.

Ainus erinevus seisneb selles, et lisandus vektorite skalaarkorrutamine.

## Eukleidiline vektorruum

Rõhutame, et eukleidilises vektorruumis $\mathbb{E}$ kehtivad kõik varem sõnastatud definitsioonid, teoreemid ja laused, sest vastavalt definitsioonile on $\mathbb{E}$ vektorruumi struktuuriga.

Ainus erinevus seisneb selles, et lisandus vektorite skalaarkorrutamine.

Järelikult, need mõisted, definitsioonid, laused, teoreemid jne, mis kasutavad vektorite skalaarkorrutamist, on iseloomulikud ainult eukleidilistele vektorruumidele ja ei ole tõlgendatavad üldisemas vektorruumis $\mathbb{V}$.

# Skalaarkorrutise arvutamine

Olgu vaadeldavas eukleidilises vektorruumis fikseeritud mingi baas $\mathfrak{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ ja vektorid $\vec{a}$, $\vec{b}$. Siis

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \dots + a_n\vec{e}_n, \\ \vec{b} &= b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + \dots + b_n\vec{e}_n. \end{aligned}$$

Sarnaselt varasemaga tähistame $n$-mõõtmelist eukleidilist vektorruumi $\mathbb{E}_n$.

# Skalaarkorrutise arvutamine

Leiame vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ skalaarkorrutise. Kasutades skalaarkorrutamise lineaarsuse omadust, saame

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= (a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+\ldots+a_n\vec{e_n})\cdot(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2}+\ldots+b_n\vec{e_n}) = \\
&= a_1b_1\,\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1+a_1b_2\,\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2+\ldots+a_1b_n\,\vec{e}_1\cdot\vec{e}_n+ \\
&+ a_2b_1\,\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1+a_2b_2\,\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2+\ldots+a_2b_n\,\vec{e}_2\cdot\vec{e}_n+ \\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ a_nb_1\,\vec{e}_n\cdot\vec{e}_1+a_nb_2\,\vec{e}_n\cdot\vec{e}_2+\ldots+a_nb_n\,\vec{e}_n\cdot\vec{e}_n.
\end{aligned}$$

## Skalaarkorrutise arvutamine

Leiame vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ skalaarkorrutise. Kasutades skalaarkorrutamise lineaarsuse omadust, saame

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= (a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+\ldots+a_n\vec{e_n})\cdot(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2}+\ldots+b_n\vec{e_n}) = \\
&= a_1b_1\;\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1+a_1b_2\;\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2+\ldots+a_1b_n\;\vec{e}_1\cdot\vec{e}_n+ \\
&+ a_2b_1\;\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1+a_2b_2\;\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2+\ldots+a_2b_n\;\vec{e}_2\cdot\vec{e}_n+ \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ a_nb_1\;\vec{e}_n\cdot\vec{e}_1+a_nb_2\;\vec{e}_n\cdot\vec{e}_2+\ldots+a_nb_n\;\vec{e}_n\cdot\vec{e}_n.
\end{aligned}$$

## Skalaarkorrutise arvutamine, meetriline maatriks

Tähistame baasivektorite skalaarkorrutised

$$g_{ij} = \vec{e_i} \cdot \vec{e_j} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Reaalarvud $g_{ij}$ osutuvad geomeetria jaoks ühe olulise maatriksi elementideks.

## Skalaarkorrutise arvutamine, meetriline maatriks

Tähistame baasivektorite skalaarkorrutised

$$g_{ij} = \vec{e_i} \cdot \vec{e_j} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Reaalarvud $g_{ij}$ osutuvad geomeetria jaoks ühe olulise maatriksi elementideks.

***Def.*** Maatriksit $G$, mille elementideks on baasi $\mathfrak{B}$ vektorite skalaarkorrutised, nimetatakse ***meetriliseks maatriksiks baasi*** $\mathfrak{B}$ ***suhtes***, s.t

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}.$$

# Skalaarkorrutise arvutamine, meetriline maatriks

Kuna vektorite skalaarkorrutamine on kommutatiivne, siis

$$g_{ij} = \vec{e_i} \cdot \vec{e_j} = \vec{e_j} \cdot \vec{e_i} = g_{ji},$$

s.o meetriline maatriks $G$ on sümmeetriline.

## Skalaarkorrutise arvutamine, meetriline maatriks

Kuna vektorite skalaarkorrutamine on kommutatiivne, siis

$$g_{ij} = \vec{e_i} \cdot \vec{e_j} = \vec{e_j} \cdot \vec{e_i} = g_{ji},$$

s.o meetriline maatriks $G$ on sümmeetriline.

Kasutades meetrilise maatriksi $G = (g_{ij})$ elemente, saame skalaarkorrutise esitada kujul

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} a_i b_j.$$

# Skalaarkorrutise arvutamine maatrikskujul

Moodustame vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ koordinaatidest üheveerulised maatriksid

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

# Skalaarkorrutise arvutamine maatrikskujul

Moodustame vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ koordinaatidest üheveerulised maatriksid

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

siis saame skalaarkorrutise arvutamise valemi kirjutada maatrikskujul

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

# Skalaarkorrutise arvutamine maatrikskujul

Maatrikstähistes

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a^T G\, b.$$

Selle võrduse paremale poolele tekib üheelemendiline, s.o $1 \times 1$, maatriks, mille samastame reaalarvuga, s.t selle ainsa reaalarvulise elemendiga.

# Skalaarkorrutise arvutamine maatrikskujul

Maatrikstähistes

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a^T \, G \, b.$$

Selle võrduse paremale poolele tekib üheelemendiline, s.o $1 \times 1$, maatriks, mille samastame reaalarvuga, s.t selle ainsa reaalarvulise elemendiga.

Vektorite $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ skalaarkorrutise tähistamiseks on kirjanduses levinud järgmised tähistusviisid:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = (\vec{x}, \vec{y}).$$

## Skalaarkorrutise arvutamine maatrikskujul

Maatrikstähistes

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a^T G\, b.$$

Selle võrduse paremale poolele tekib üheelemendiline, s.o $1 \times 1$, maatriks, mille samastame reaalarvuga, s.t selle ainsa reaalarvulise elemendiga.

Vektorite $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ skalaarkorrutise tähistamiseks on kirjanduses levinud järgmised tähistusviisid:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \langle\, \vec{x}, \vec{y}\,\rangle = (\vec{x}, \vec{y}).$$

Selles kursuse raames kasutame tähistust $\vec{x} \cdot \vec{y}$, kusjuures soovitame lugejal olla tähelepanelik, et sümboolika kasutamisel mitte eksida.

# *Eukleidilised ruumid*

# *Põhilised meetrilised suurused*

Mati Väljas

mati.valjas@ttu.ee

Tallinna Tehnikaülikool

# Põhilised meetrilised suurused, vektori pikkus

Edaspidi eeldame, et tegemist on eukleidilise vektorruumiga, s.t selle ruumi vektoritega on võimalik teha nii lineaarseid tehteid kui ka arvutada kahe vektori skalaarkorrutist.

# Põhilised meetrilised suurused, vektori pikkus

Edaspidi eeldame, et tegemist on eukleidilise vektorruumiga, s.t selle ruumi vektoritega on võimalik teha nii lineaarseid tehteid kui ka arvutada kahe vektori skalaarkorrutist.

Skalaarkorrutise positiivsuse omaduse tõttu on iga vektori skalaarkorrutis iseendaga ehk vektori skalaarruut mittenegatiivne, s.o

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^{\,2} \geqslant 0.$$

## Põhilised meetrilised suurused, vektori pikkus

Edaspidi eeldame, et tegemist on eukleidilise vektorruumiga, s.t selle ruumi vektoritega on võimalik teha nii lineaarseid tehteid kui ka arvutada kahe vektori skalaarkorrutist.

Skalaarkorrutise positiivsuse omaduse tõttu on iga vektori skalaarkorrutis iseendaga ehk vektori skalaarruut mittenegatiivne, s.o

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^{\,2} \geqslant 0.$$

***Def.*** Eukleidilises vektorruumis nimetatakse ***vektori*** $\vec{a}$ ***pikkuseks*** ehk ***mooduliks*** reaalarvu

$$|\,\vec{a}\,| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}.$$

## Põhilised meetrilised suurused, ühikvektor

Pikkus on oluline mõiste ja sellele tugineb eukleidiline geomeetria. Näiteks praktikas on lõigu pikkuse leidmine enamasti seotud mõõtmisega ja seetõttu nimetatakse pikkust **meetriliseks suuruseks**.

## Põhilised meetrilised suurused, ühikvektor

Pikkus on oluline mõiste ja sellele tugineb eukleidiline geomeetria. Näiteks praktikas on lõigu pikkuse leidmine enamasti seotud mõõtmisega ja seetõttu nimetatakse pikkust **meetriliseks suuruseks**.

Vektori pikkuse arvutamise valemist näeme, et vektori pikkus avaldub skalaarkorrutise kaudu, mille arvutamiseks on vaja teada maatriksit $G$. Tuginedes nimetatud asjaolule, ongi põhjendatud maatriksi $G$ nimetamine meetriliseks maatriksiks.

## Põhilised meetrilised suurused, ühikvektor

Pikkus on oluline mõiste ja sellele tugineb eukleidiline geomeetria. Näiteks praktikas on lõigu pikkuse leidmine enamasti seotud mõõtmisega ja seetõttu nimetatakse pikkust **meetriliseks suuruseks**.

Vektori pikkuse arvutamise valemist näeme, et vektori pikkus avaldub skalaarkorrutise kaudu, mille arvutamiseks on vaja teada maatriksit $G$. Tuginedes nimetatud asjaolule, ongi põhjendatud maatriksi $G$ nimetamine meetriliseks maatriksiks.

***Def.*** Vektoriga $\vec{a} \neq \vec{\theta}$ samasuunaliseks ***ühikvektoriks*** nimetatakse vektorit

$$\vec{a}^{\,0} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\,\vec{a}\,|}\,\vec{a}.$$

# Põhilised meetrilised suurused, ühikvektor

Seega iga vektor $\vec{a}$ eukleidilisest vektorruumist on avaldatav kujul

$$\vec{a} = |\,\vec{a}\,|\,\vec{a}^{\,0}.$$

## Põhilised meetrilised suurused, ühikvektor

Seega iga vektor $\vec{a}$ eukleidilisest vektorruumist on avaldatav kujul

$$\vec{a} = |\,\vec{a}\,|\,\vec{a}^{\,0}.$$

Definitsioonist järeldub, et ühikvektori pikkus $|\,\vec{a}^{\,0}| = 1$.

# Põhilised meetrilised suurused, ühikvektor

Seega iga vektor $\vec{a}$ eukleididilisest vektorruumist on avaldatav kujul

$$\vec{a} = |\,\vec{a}\,|\,\vec{a}^{\,0}.$$

Definitsioonist järeldub, et ühikvektori pikkus $|\,\vec{a}^{\,0}\,| = 1$.

Tõepoolest,

$$\vec{a}^{\,0} \cdot \vec{a}^{\,0} = \frac{1}{|\,\vec{a}\,|}\,\vec{a} \cdot \frac{1}{|\,\vec{a}\,|}\,\vec{a} = \frac{1}{|\,\vec{a}\,|^2}\,\vec{a} \cdot \vec{a} = \frac{1}{|\,\vec{a}\,|^2}\,|\,\vec{a}\,|^2 = 1.$$

## Põhilised meetrilised suurused, ühikvektor

Seega iga vektor $\vec{a}$ eukleidilisest vektorruumist on avaldatav kujul

$$\vec{a} = |\,\vec{a}\,|\,\vec{a}^{\,0}.$$

Definitsioonist järeldub, et ühikvektori pikkus $|\,\vec{a}^{\,0}\,| = 1$.

Tõepoolest,

$$\vec{a}^{\,0} \cdot \vec{a}^{\,0} = \frac{1}{|\,\vec{a}\,|}\,\vec{a} \cdot \frac{1}{|\,\vec{a}\,|}\,\vec{a} = \frac{1}{|\,\vec{a}\,|^2}\,\vec{a} \cdot \vec{a} = \frac{1}{|\,\vec{a}\,|^2}\,|\,\vec{a}\,|^2 = 1.$$

Lisaks vektori pikkusele on nii geomeetrias kui ka praktikas vaja mõõta nurki, mis on samuti meetrilised suurused. Enne kahe vektori vahelise nurga defineerimist tõestame ühe olulise võrratuse.

# Cauchy-Bunjakovski võrratus

Olgu $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kaks nullvektorist erinevat vektorit. Moodustame nendest vektoritest lineaarkombinatsiooni $\vec{a} + \lambda\vec{b}$, kus $\lambda$ on mingi skalaar.

## Cauchy-Bunjakovski võrratus

Olgu $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kaks nullvektorist erinevat vektorit. Moodustame nendest vektoritest lineaarkombinatsiooni $\vec{a} + \lambda\vec{b}$, kus $\lambda$ on mingi skalaar.

Tulemuseks saame uue vektori ja mittenegatiivsuse omaduse tõttu $(\vec{a} + \lambda\vec{b})^2 \geqslant 0$ iga $\lambda \in \mathbb{R}$ korral.

## Cauchy-Bunjakovski võrratus

Olgu $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kaks nullvektorist erinevat vektorit. Moodustame nendest vektoritest lineaarkombinatsiooni $\vec{a} + \lambda\vec{b}$, kus $\lambda$ on mingi skalaar.

Tulemuseks saame uue vektori ja mittenegatiivsuse omaduse tõttu $(\vec{a} + \lambda\vec{b})^2 \geqslant 0$ iga $\lambda \in \mathbb{R}$ korral.

Kasutades teisi skalaarkorrutamise omadusi, saame viimase võrratuse teisendada kujule

$$\vec{a}^{\,2} + 2\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) + \lambda^2\vec{b}^{\,2} \geqslant 0.$$

See võrratus kehtib iga reaalarvu $\lambda$ korral.

## Cauchy-Bunjakovski võrratus

Olgu $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kaks nullvektorist erinevat vektorit. Moodustame nendest vektoritest lineaarkombinatsiooni $\vec{a} + \lambda\vec{b}$, kus $\lambda$ on mingi skalaar.

Tulemuseks saame uue vektori ja mittenegatiivsuse omaduse tõttu $(\vec{a} + \lambda\vec{b})^2 \geqslant 0$ iga $\lambda \in \mathbb{R}$ korral.

Kasutades teisi skalaarkorrutamise omadusi, saame viimase võrratuse teisendada kujule

$$\vec{a}^{\,2} + 2\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) + \lambda^2\vec{b}^{\,2} \geqslant 0.$$

See võrratus kehtib iga reaalarvu $\lambda$ korral.
Valime

$$\lambda = -\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b}^{\,2}}.$$

## Cauchy-Bunjakovski võrratus

Pärast lihtsaid teisendusi saame võrratuse

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leqslant \vec{a}^{\,2} \vec{b}^{\,2},$$

mida nimetatakse ***Cauchy-Bunjakovski võrratuseks***.

## Cauchy-Bunjakovski võrratus

Pärast lihtsaid teisendusi saame võrratuse

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leqslant \vec{a}^{\,2} \vec{b}^{\,2},$$

mida nimetatakse ***Cauchy-Bunjakovski võrratuseks***.

***Lause.*** Cauchy-Bunjakovski võrratus muutub võrduseks parajasti siis, kui vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on kollineaarsed.

## Cauchy-Bunjakovski võrratus

Pärast lihtsaid teisendusi saame võrratuse

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \leqslant \vec{a}^{\,2}\vec{b}^{\,2},$$

mida nimetatakse ***Cauchy-Bunjakovski võrratuseks***.

***Lause.*** Cauchy-Bunjakovski võrratus muutub võrduseks parajasti siis, kui vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on kollineaarsed.

*Tõestus. Tarvilikkus.* Olgu vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kollineaarsed, s.o $\vec{a}=\lambda\vec{b}$. Leiame

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = (\lambda\vec{b}\cdot\vec{b})^2 = \lambda^2(\vec{b}^{\,2})^2, \quad \vec{a}^{\,2}\vec{b}^2 = (\lambda\vec{b})^2\vec{b}^2 = \lambda^2(\vec{b}^{\,2})^2.$$

## Cauchy-Bunjakovski võrratus

Pärast lihtsaid teisendusi saame võrratuse

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \leqslant \vec{a}^{\,2}\vec{b}^{\,2},$$

mida nimetatakse ***Cauchy-Bunjakovski võrratuseks***.

***Lause.*** Cauchy-Bunjakovski võrratus muutub võrduseks parajasti siis, kui vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on kollineaarsed.

*Tõestus. Tarvilikkus.* Olgu vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kollineaarsed, s.o $\vec{a}=\lambda\vec{b}$. Leiame

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=(\lambda\vec{b}\cdot\vec{b})^2=\lambda^2(\vec{b}^{\,2})^2, \quad \vec{a}^{\,2}\vec{b}^{\,2}=(\lambda\vec{b})^2\vec{b}^{\,2}=\lambda^2(\vec{b}^{\,2})^2.$$

Nendest võrdustest järeldubki, et Cauchy-Bunjakovski võrratus muutub võrduseks.

## Cauchy-Bunjakovski võrratus

*Piisavus*. Oletame, et mingite vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ korral kehtib võrdus

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2.$$

# Cauchy-Bunjakovski võrratus

*Piisavus*. Oletame, et mingite vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ korral kehtib võrdus

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2.$$

Juhul kui $\vec{b} = \vec{\theta}$, siis $\vec{b} = 0\vec{a}$, s.o vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on kollineaarsed.

## Cauchy-Bunjakovski võrratus

*Piisavus*. Oletame, et mingite vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ korral kehtib võrdus

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2}\vec{b}^{\,2}.$$

Juhul kui $\vec{b} = \vec{\theta}$, siis $\vec{b} = 0\vec{a}$, s.o vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on kollineaarsed.

Kui $\vec{b} \neq \vec{\theta}$, siis teisendades eelduseks olevat avaldist, saame

$$\vec{a}^{\,2} - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{\vec{b}^{\,2}} = \vec{a}^{\,2} - 2\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b}^{\,2}}\,\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{(\vec{b}^{\,2})^2}\,\vec{b}^{\,2} = \left(\vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b}^{\,2}}\,\vec{b}\right)^2 = (\vec{a} - \lambda\vec{b})^2 = 0,$$

kus $\lambda = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b}^{\,2}}$.

## Cauchy-Bunjakovski võrratus

*Piisavus*. Oletame, et mingite vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ korral kehtib võrdus

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2}\vec{b}^{\,2}.$$

Juhul kui $\vec{b} = \vec{\theta}$, siis $\vec{b} = 0\vec{a}$, s.o vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on kollineaarsed.

Kui $\vec{b} \neq \vec{\theta}$, siis teisendades eelduseks olevat avaldist, saame

$$\vec{a}^{\,2} - \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{\vec{b}^{\,2}} = \vec{a}^{\,2} - 2\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}^{\,2}}\,\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{(\vec{b}^{\,2})^2}\,\vec{b}^{\,2} = \left(\vec{a} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}^{\,2}}\,\vec{b}\right)^2 = (\vec{a} - \lambda\vec{b})^2 = 0,$$

kus $\lambda = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}^{\,2}}$.

Skalaarkorrutamise definitsioonist järeldub, et $\vec{a} - \lambda\vec{b} = \vec{\theta}$, s.o vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on kollineaarsed.

## Kahe vektori vaheline nurk

Tõestatud lausest järeldub, et Cauchy-Bunjakovski võrratus

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leqslant \vec{a}^{\,2} \vec{b}^{\,2},$$

annab mugava võimaluse vektorite kollineaarsuse kontrollimiseks eukleidilises vektorruumis.

Cauchy-Bunjakovski võrratus muutub võrduseks, kui vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on kollineaarsed.

Paneme tähele, et Cauchy-Bunjakovski võrratuse vasakul poolel on vektorite skalaarkorrutise (s.o arvu) ruut, aga paremal poolel on vektorite skalaarruutude (s.o arvude) korrutis.

## Kahe vektori vaheline nurk

Cauchy-Bunjakovski võrratuse saame kirjutada kujul

$$\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{\vec{a}^{\,2}\,\vec{b}^{\,2}} \leqslant 1,$$

millest pärast juurimist ja vektori pikkuse arvutamise valemi kasutamist saame võrratuse

$$\frac{|\,\vec{a}\cdot\vec{b}\,|}{|\,\vec{a}\,||\,\vec{b}\,|} \leqslant 1.$$

Selle võrratuse lugejas on skalaarkorrutise absoluutväärtus, aga nimetajas mõlema vektori pikkuste korrutis. Seega oleme sidunud kahe antud vektoriga mingi arvu, mille absoluutväärtus on väiksem ühest.

# Kahe vektori vaheline nurk

***Def.*** Eukleidilises vektorruumis ***kahe nullvektorist erineva vektori*** $\vec{a}$ ***ja*** $\vec{b}$ ***vaheliseks nurgaks*** nimetatakse nurka $\varphi$, mille koosinus on

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\,\vec{a}\,||\,\vec{b}\,|}.$$

# Kahe vektori vaheline nurk

***Def.*** Eukleidilises vektorruumis ***kahe nullvektorist erineva vektori*** $\vec{a}$ ***ja*** $\vec{b}$ ***vaheliseks nurgaks*** nimetatakse nurka $\varphi$, mille koosinus on

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\,\vec{a}\,||\,\vec{b}\,|}.$$

Cauchy-Bunjakovski võrratusest järeldub, et see definitsioon on korrektne, sest

$$-1 \leqslant \cos\varphi \leqslant 1.$$

## Kahe vektori vaheline nurk

***Def.*** Eukleidilises vektorruumis ***kahe nullvektorist erineva vektori*** $\vec{a}$ ***ja*** $\vec{b}$ ***vaheliseks nurgaks*** nimetatakse nurka $\varphi$, mille koosinus on

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\,\vec{a}\,||\,\vec{b}\,|}.$$

Cauchy-Bunjakovski võrratusest järeldub, et see definitsioon on korrektne, sest

$$-1 \leqslant \cos\varphi \leqslant 1.$$

Nurga koosinuse arvutamise valem on lugejale kindlasti tuttav, kooligeomeetrias tuletati see geomeetrilistest kaalutlustest.

# Kahe vektori vaheline nurk

Kuna nurga koosinuse märk on sama mis murru lugejalgi, siis *vektoritevaheline nurk on teravnurk siis, kui vektorite skalaarkorrutis on positiivne, nürinurk siis, kui skalaarkorrutis on negatiivne*.

# Kahe vektori vaheline nurk

Kuna nurga koosinuse märk on sama mis murru lugejalgi, siis *vektoritevaheline nurk on teravnurk siis, kui vektorite skalaarkorrutis on positiivne, nürinurk siis, kui skalaarkorrutis on negatiivne*.

***Def.*** Vektoreid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ nimetatakse ***ristuvateks*** ehk ***ortogonaalseteks***, kui

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

# Kahe vektori vaheline nurk

Kuna nurga koosinuse märk on sama mis murru lugejalgi, siis *vektoritevaheline nurk on teravnurk siis, kui vektorite skalaarkorrutis on positiivne, nürinurk siis, kui skalaarkorrutis on negatiivne*.

***Def.*** Vektoreid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ nimetatakse ***ristuvateks*** ehk ***ortogonaalseteks***, kui

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Selles paragrahvis käsitletud mõisteid, vektori pikkust ja kahe vektori vahelist nurka nimetataksegi ***põhilisteks meetrilisteks suurusteks***. Samuti veendusime, et skalaarkorrutamise olemasolu vektorruumis ja põhiliste meetriliste suuruste olemasolu geomeetrias on omavahel tihedalt seotud. Veelgi enam, ühe olemasolu määrab teise. Praegu avaldasime põhilised meetrilised suurused skalaarkorrutise kaudu.