Lineaarsed võrrandisüsteemid

Kronecker-Cappelli teoreem

Mati Väljas

mati.valjas@ttu.ee

Tallinna Tehnikaülikool

LVS

Uurime, millistel tingimustel lineaarne võrrandisüsteem

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

on lahenduv.

LVS

Uurime, millistel tingimustel lineaarne võrrandisüsteem

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

on lahenduv.

Eelmistes loengutes selgus, et iga lineaarne võrrandisüsteem on esitatav vektorkujul, st

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_nA_n = B,$$

kus $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ on laiendatud maatriksi A_L veergudest moodustatud üheveerulised maatriksid ehk veeruvektorid.

Kronecker-Cappelli teoreem

Teoreem. Lineaarne võrrndisüsteem on lahenduv parajasti siis, kui süsteemimaatriksi ja laiendatud maatriksi astakud on võrdsed, so

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A_L).$$

Kronecker-Cappelli teoreem

Teoreem. Lineaarne võrrndisüsteem on lahenduv parajasti siis, kui süsteemimaatriksi ja laiendatud maatriksi astakud on võrdsed, so

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A_L).$$

Tõestus. Tarvilikkus. Oletame, et võrrandisüsteem on lahenduv, st leiduvad niisugused reaalarvud arvud $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, et

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_n A_n = B.$$

Kronecker-Cappelli teoreem

Teoreem. Lineaarne võrrndisüsteem on lahenduv parajasti siis, kui süsteemimaatriksi ja laiendatud maatriksi astakud on võrdsed, so

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A_L).$$

Tõestus. Tarvilikkus. Oletame, et võrrandisüsteem on lahenduv, st leiduvad niisugused reaalarvud arvud $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, et

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_n A_n = B.$$

Peame tõestama, et kehtib astakutingimus.

Tõestus. Tarvilikkus

Võrrandisüsteemi laiendatud maatriks on:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Tõestus. Tarvilikkus

Võrrandisüsteemi laiendatud maatriks on:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Teisenadame selle maariksi viimast veergu järgmiselt: lahutame viimasest veerust α_1 kordse esimese veeru,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 - \alpha_1 a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 - \alpha_1 a_{21} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m - \alpha_1 a_{m1} \end{array}\right).$$

Tõestus. Tarvilikkus

Siis α_2 kordse teise veeru jne. Lõpuks α_n kordse eelviimase veeru, seega

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 - \alpha_1 a_{11} - \alpha_2 a_{12} - \dots - \alpha_n a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 - \alpha_1 a_{21} - \alpha_2 a_{22} - \dots - \alpha_n a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m - \alpha_1 a_{m1} - \alpha_2 a_{m2} - \dots - \alpha_n a_{mn} \end{array}\right).$$

Tõestus. Tarvilikkus

Siis α_2 kordse teise veeru jne. Lõpuks α_n kordse eelviimase veeru, seega

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 - \alpha_1 a_{11} - \alpha_2 a_{12} - \dots - \alpha_n a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 - \alpha_1 a_{21} - \alpha_2 a_{22} - \dots - \alpha_n a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m - \alpha_1 a_{m1} - \alpha_2 a_{m2} - \dots - \alpha_n a_{mn} \end{array}\right).$$

Järelikult

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 \end{array}\right).$$

Tõestus. Tarvilikkus

Siis α_2 kordse teise veeru jne. Lõpuks α_n kordse eelviimase veeru, seega

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 - \alpha_1 a_{11} - \alpha_2 a_{12} - \dots - \alpha_n a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 - \alpha_1 a_{21} - \alpha_2 a_{22} - \dots - \alpha_n a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m - \alpha_1 a_{m1} - \alpha_2 a_{m2} - \dots - \alpha_n a_{mn} \end{array}\right).$$

Järelikult

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 \end{array}\right).$$

Seega süsteemimaatiksi A ja laiendatud maatriksi A_L astakut määravad miinorid langevad kokku ja järelikult astakuktingimus on täidetud.

Tõestus. Piisavus

Oletame, et astakutingimus

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A_L).$$

on täidetud ja näitame, et võrrandisüsteem on lahenduv.

Tõestus. Piisavus

Oletame, et astakutingimus

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A_L).$$

on täidetud ja näitame, et võrrandisüsteem on lahenduv.

Oletame, et laiendatud maatriksi astak on r ja astakut määrav miinor paikneb maatriksi ülemises vasakus nurgas:

$$A_L = \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1,\,r+1} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2r} & a_{2,\,r+1} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{r,\,r+1} & \dots & a_{rn} & b_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mr} & a_{m,\,r+1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Tõestus. Piisavus

Niisuguse olukorra võime alati saavutada, kui paigutame süsteemis ümber võrrandeid ja vajadusel muudame muutujate tähistusi.

Tõestus. Piisavus

Niisuguse olukorra võime alati saavutada, kui paigutame süsteemis ümber võrrandeid ja vajadusel muudame muutujate tähistusi.
Varem tõestatud lause põhjal on maariksi A_L esimesed r veeruvektorit $A_1, A_2, \ldots, A_r$ lineaarselt sõltumatud ja veeruvektor vektor B on avaldatav nende lineaarse kombinatsioonina, st leiduvad niisugused reaalarvud $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, et

$$B = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_r A_r.$$

Tõestus. Piisavus

Niisuguse olukorra võime alati saavutada, kui paigutame süsteemis ümber võrrandeid ja vajadusel muudame muutujate tähistusi.
Varem tõestatud lause põhjal on maariksi A_L esimesed r veeruvektorit $A_1, A_2, \ldots, A_r$ lineaarselt sõltumatud ja veeruvektor vektor B on avaldatav nende lineaarse kombinatsioonina, st leiduvad niisugused reaalarvud $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, et

$$B = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_r A_r.$$

Võttes

$$x_1 = \lambda_1, x_2 = \lambda_2, \ldots, x_r = \lambda_r, x_{r+1} = 0, \ldots, x_n = 0$$

näeme, et olemegi konstrueerinud esialgsele võrrandisüsteemile lahendi.

Lineaarsete võrrandisüsteemide lahendite omadused

Olgu antud lineaarne võrrandisüsteem

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

Lineaarsete võrrandisüsteemide lahendite omadused

Olgu antud lineaarne võrrandisüsteem

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

ja sellele vastav homogeenne võrrandisüsteem

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

kus $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$, ehk maatrikskujul vastavalt $AX = B$ ja $AX = \Theta$.

Lineaarsete võrrandisüsteemide lahendite omadused

Uurime kõigepealt homogeense lineaarse võrrandisüsteemi lahendeid.

Lineaarsete võrrandisüsteemide lahendite omadused

Uurime kõigepealt homogeense lineaarse võrrandisüsteemi lahendeid.

Kronecker-Capelli teoreemist järeldub, et homogeenne võrrandisüsteem on kooskõlaline, sest astakutingimus on alati täidetud (nullidest koosnevast vabaliikmete veerust ei sõltu laiendatud maatriksi astak).

Lineaarsete võrrandisüsteemide lahendite omadused

Uurime kõigepealt homogeense lineaarse võrrandisüsteemi lahendeid.

Kronecker-Capelli teoreemist järeldub, et homogeenne võrrandisüsteem on kooskõlaline, sest astakutingimus on alati täidetud (nullidest koosnevast vabaliikmete veerust ei sõltu laiendatud maatriksi astak).
Homogeenne lineaarne võrrandisüsteem omab alati lahendit $\xi = \big(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\big)$, kus

$$\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 0,$$

mida nimetatakse võrrandisüsteemi ***triviaalseks lahendiks***.

Lineaarsete võrrandisüsteemide lahendite omadused

Uurime kõigepealt homogeense lineaarse võrrandisüsteemi lahendeid.

Kronecker-Capelli teoreemist järeldub, et homogeenne võrrandisüsteem on kooskõlaline, sest astakutingimus on alati täidetud (nullidest koosnevast vabaliikmete veerust ei sõltu laiendatud maatriksi astak).
Homogeenne lineaarne võrrandisüsteem omab alati lahendit $\xi = \big(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\big)$, kus

$$\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 0,$$

mida nimetatkse võrrandisüsteemi ***triviaalseks lahendiks***.

Võrrandisüsteemi $AX = \Theta$ mistahes teist lahendit, kus vähemalt üks $\xi_i \neq 0$, nimetatakse ***mittetriviaalseks***.

Lineaarsete võrrandisüsteemide lahendite omadused

Lause. Homogeene lineaarne võrrandisüsteem omab mittetriviaalseid lahendeid parajasti siis, kui $\mathrm{rank}(A) < n$ (n muutujate arv).

Lineaarsete võrrandisüsteemide lahendite omadused

Lause. Homogeene lineaarne võrrandisüsteem omab mittetriviaalseid lahendeid parajasti siis, kui $\mathrm{rank}(A) < n$ (n muutujate arv).

Tõestus. Tarvilikkus. Oletame, et võrrandisüsteem $AX = \Theta$ omab mittetriviaalset lahendit. Siis süsteemimaatriksi A veeruvektorid on lineaarselt sõltuvad, sest neist moodustaud mittetrivaalne lineaarkombinatsioon on nullvektor. Järelikult lineaarselt sõltumatute veeruvektorite arv on väiksem muutujate arvust, st $\mathrm{rank}(A) < n$.

Lineaarsete võrrandisüsteemide lahendite omadused

Lause. Homogeene lineaarne võrrandisüsteem omab mittetriviaalseid lahendeid parajasti siis, kui $\operatorname{rank}(A) < n$ (n muutujate arv).

Tõestus. Tarvilikkus. Oletame, et võrrandisüsteem $AX = \Theta$ omab mittetriviaalset lahendit. Siis süsteemimaatriksi A veeruvektorid on lineaarselt sõltuvad, sest neist moodustaud mittetrivaalne lineaarkombinatsioon on nullvektor. Järelikult lineaarselt sõltumatute veeruvektorite arv on väiksem muutujate arvust, st $\operatorname{rank}(A) < n$.

Piisavus. Olgu $r = \operatorname{rank}(A) < n$. Siis maatriks A sisaldab r lineaarselt sõltumatut veeruvektorit ja ülejäänud $(n - r)$ veeruvektorit avalduvad nende lineaarselt sõltumatute veeruvektorite lineaarse kombinastsioonina. Selle lineaarse kombinatsiooni kordajad sobivad võrrandisüsteemi $AX = \Theta$ mittetriviaalse lahendi komponentideks.

Lineaarsete võrrandisüsteemide lahendite omadused

Lause. Olgu $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ ja $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ võrrandisüsteemi $AX = B$ kaks lahendit. Siis $\xi - \eta$ on võrrandisüsteemi $AX = \Theta$ lahend.

Lineaarsete võrrandisüsteemide lahendite omadused

Lause. Olgu $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ ja $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ võrrandisüsteemi $AX = B$ kaks lahendit. Siis $\xi - \eta$ on võrrandisüsteemi $AX = \Theta$ lahend.

Tõestus. Kasutame võrrandisüsteemi maatrikskuju:

$$A(\xi - \eta) = A\xi - A\eta = B - B = \Theta.$$

Lineaarsete võrrandisüsteemide lahendite omadused

Lause. Olgu $\xi = \big(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\big)$ võrrandisüsteemi $AX = B$ mingi lahend. Siis selle võrrandisüsteemi mingi teine lahend ζ avaldub kujul $\zeta = \xi + \eta$, kus $\eta = \big(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\big)$ on võrrandisüsteemi $AX = \Theta$ lahend.

Lineaarsete võrrandisüsteemide lahendite omadused

Lause. Olgu $\xi = \big(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\big)$ võrrandisüsteemi $AX = B$ mingi lahend. Siis selle võrrandisüsteemi mingi teine lahend ζ avaldub kujul $\zeta = \xi + \eta$, kus $\eta = \big(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\big)$ on võrrandisüsteemi $AX = \Theta$ lahend.

Tõestus. Olgu ξ ja ζ võrrandisüsteemi $AX = B$ kaks lahendit. Eelmisest lausest järeldub, et

$$A(\zeta - \xi) = \Theta,$$

Lineaarsete võrrandisüsteemide lahendite omadused

Lause. Olgu $\xi = \big(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\big)$ võrrandisüsteemi $AX = B$ mingi lahend. Siis selle võrrandisüsteemi mingi teine lahend ζ avaldub kujul $\zeta = \xi + \eta$, kus $\eta = \big(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\big)$ on võrrandisüsteemi $AX = \Theta$ lahend.

Tõestus. Olgu ξ ja ζ võrrandisüsteemi $AX = B$ kaks lahendit. Eelmisest lausest järeldub, et

$$A(\zeta - \xi) = \Theta,$$

millest järeldub, et $\eta = \zeta - \xi$ on võrrandisüsteemi $AX = \Theta$ lahend. Järelikult

$$\zeta = \xi + \eta.$$

Lineaarsete võrrandisüsteemide lahendite omadused

Kokkuvõtteks võime öelda, et mittehomogeense võrrandisüsteemi iga lahend on avaldatav selle võrrandisüsteemi mingi lahendi ja sellele vastava homogeense võrrandisüsteemi lahendi summana.

Lineaarsete võrrandisüsteemide lahendite omadused

Lause. Võrrandisüsteemil $AX = B$ on ainult üks lahend parajasti siis, kui $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A_L) = n$.

Tõestus Tarvilikkus. Oletame, et $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A_L) = n$ ja tõestame, et võrrandisüsteemil on üks lahend.
Astakutingimusest $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A_L)$ järeldub, et võrrandisüsteemil eksisteerib lahend. Võrduse $\mathrm{rank}(A) = n$ ja varem tõestatud lausete põhjal

$$\zeta = \xi + \eta,$$

kus $\eta = \Theta$. Järelikult $\zeta = \xi$ ja võrrandisüsteemi $AX = B$ lahend on määratud üheselt.

Tõestus. Piisavus

Oletame, et võrrandisüsteemi $AX = B$ lahend on määratud üheselt.

Lahendi olemasolu tõttu on astakutingimus $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A_L)$ täidetud. Lahendi ühesuse tõttu $\mathrm{rank}(A) = n$, sest laiendatud maatrksi A_L vabaliikmete veerg avaldub üheselt süsteemimaatriksi A veeruvektorite lineaarse kombinatsioonina. Järelikult $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A_L) = n$.

Lineaarsete võrrandisüsteemide lahendite omadused

Def. Lineaarset võrrandisüsteemi $A'X = B'$ nimetatakse võrrandisüsteemi $AX = B$ järelduseks, kui süsteemi $AX = B$ iga lahendi ξ korral $A'\xi = B'$.

Lineaarsete võrrandisüsteemide lahendite omadused

Def. Lineaarset võrrandisüsteemi $A'X = B'$ nimetatakse võrrandisüsteemi $AX = B$ järelduseks, kui süsteemi $AX = B$ iga lahendi ξ korral $A'\xi = B'$.

Def. Lineaarset võrrandit

$$(\lambda_1 a_{11} + \ldots + \lambda_m a_{m1})x_1 + \ldots + (\lambda_1 a_{1n} + \ldots + \lambda_m a_{mn})x_n = \\ = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_m b_m,$$

kus $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, nimetatakse võrrandisüsteemi $AX = B$ ***võrrandite lineaarseks kombinatsiooniks***.

Lineaarsete võrrandisüsteemide lahendite omadused

Lause. Võrrandisüsteemi $AX = B$ võrrandite iga lineaarne kombinatsioon on selle süsteemi järelduseks.

Lineaarsete võrrandisüsteemide lahendite omadused

Lause. Võrrandisüsteemi $AX = B$ võrrandite iga lineaarne kombinatsioon on selle süsteemi järelduseks.

Tõestus. Olgu $\xi = \big(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\big)$ võrandisüsteemi mingi lahend, st $A\xi = B$. Selle süsteemi võrrandistest moonustatud lineaarse kombinatsiooni saame teisendada kujule

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - b_1)\lambda_1 + \ldots \\ +(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n - b_m)\lambda_m = 0.$$

Tingimuse $A\xi = B$ tõttu on kõik sulgavaldised võrdsed nulliga ja järelikult ξ on lineaarsele kombinatsioonile vastava võrrandi lahendiks. Seega

$AX = B \quad \Rightarrow \quad$ lineaarsele kombinatsioonile vastava võrrandi lahend.

Lineaarsete võrrandisüsteemide lahendite omadused

Def. Kahte lineaarset võrrandisüsteemi nimetatakse ***samaväärseteks*** ehk ***lineaarselt ekvivalentseteks***, kui mistahes ühe süsteemi lahend osub teise võrrandisüsteemi lahendiks.

Lineaarsete võrrandisüsteemide lahendite omadused

Def. Kahte lineaarset võrrandisüsteemi nimetatakse ***samaväärseteks*** ehk ***lineaarselt ekvivalentseteks***, kui mistahes ühe süsteemi lahend osub teise võrrandisüsteemi lahendiks.

Järgmised laused on eelmiste definitsioonide vahetud järeldused.

Lause. Kaks lineaarset võrrandisüsteemi on samaväärsed parajasti siis, kui neist igaüks on teise järelduseks.

Lineaarsete võrrandisüsteemide lahendite omadused

Def. Kahte lineaarset võrrandisüsteemi nimetatakse ***samaväärseteks*** ehk ***lineaarselt ekvivalentseteks***, kui mistahes ühe süsteemi lahend osub teise võrrandisüsteemi lahendiks.

Järgmised laused on eelmiste definitsioonide vahetud järeldused.

Lause. Kaks lineaarset võrrandisüsteemi on samaväärsed parajasti siis, kui neist igaüks on teise järelduseks.

Lause. Kaks lineaarset võrrandisüsteemi on samaväärsed parajasti siis, kui nende lahendite hulgad landevad kokku.

Lineaarsete võrrandisüsteemide lahendite omadused

Def. Lineaarse võrrandisüsteemi elementaarteisndusteks nimetatakse teisendusi:

1. võrrandisüsteemi mingi võrrandi korrutamist nullist erineva skalaariga;
2. võrrandisüsteemi mingile võrrandile mingi skalaari kordse teise võrrandi juurdeliitmine;
3. võrrandisüsteemis võrrandite ümberpaigutamine;
4. lineaastete võrrandite, mille muutujate kõik kordajad ja vabaliige on võrdsed nulliga, võrrandisüsteemi lisamine ja ära jätmine.