Lineaarsed võrrandisüsteemid

Maatriksi astak

Mati Väljas

mati.valjas@ttu.ee

Tallinna Tehnikaülikool

Maatriksi r-järku miinori mõiste

Def. Maatriksi r***-järku miinoriks*** nimetatakse determinanti, mis on moodustatud selle maatriksi mingi r rea ja r veeru ühistest elementidest.

Maatriksi r-järku miinori mõiste

Def. Maatriksi ***r-järku miinoriks*** nimetatakse determinanti, mis on moodustatud selle maatriksi mingi r rea ja r veeru ühistest elementidest.

Maatriksi $r-$järku miinorit, mis on moodustatud ridade $i_1, i_2, \ldots, i_r$ ja veergude $j_1, j_2, \ldots, j_r$ ühistest elementidest, tähistatakse

$$M_{i_1,i_2,\ldots,i_r}^{j_1,j_2,\ldots,j_r} = \begin{vmatrix} a_{i_1,j_1} & a_{i_1,j_2} & \ldots & a_{i_1,j_r} \\ a_{i_2,j_1} & a_{i_2,j_2} & \ldots & a_{i_2,j_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_r,j_1} & a_{i_r,j_2} & \ldots & a_{i_r,j_r} \end{vmatrix},$$

kus $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$ ja $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$.

Maatriksi r-järku miinori mõiste

Juhul, kui räägime lihtsalt maatriksi $r-$järku miinorist ja seda moodustavad read ning veerud ei ole olulised, siis kasutame miinori jaoks tähist M_r.

Maatriksi r-järku miinori mõiste

Juhul, kui räägime lihtsalt maatriksi $r-$järku miinorist ja seda moodustavad read ning veerud ei ole olulised, siis kasutame miinori jaoks tähist M_r.

Determinantide arendusvalemis kasutasime deteminandi elemendile a_{ij} vastavat mi-
inorit M_{ij}, mis n-järku deteminandi korral on $(n-1)-$järku miinor.

Maatriksi r-järku miinori mõiste

Juhul, kui räägime lihtsalt maatriksi $r-$järku miinorist ja seda moodustavad read ning veerud ei ole olulised, siis kasutame miinori jaoks tähist M_r.

Determinantide arendusvalemis kasutasime deteminandi elemendile a_{ij} vastavat miinorit M_{ij}, mis n-järku deteminandi korral on $(n-1)-$järku miinor.

Vastavalt definitsioonile saame niisuguse miinori siis, kui $n-$järku detreminandile vastavas maatriksis vaatame nende ridade ja veergude ühiseid elemente, mis ei sisalda elementi a_{ij}.

Maatriksi r-järku miinori mõiste

Juhul, kui räägime lihtsalt maatriksi $r-$järku miinorist ja seda moodustavad read ning veerud ei ole olulised, siis kasutame miinori jaoks tähist M_r.

Determinantide arendusvalemis kasutasime deteminandi elemendile a_{ij} vastavat miinorit M_{ij}, mis n-järku deteminandi korral on $(n-1)-$järku miinor.

Vastavalt definitsioonile saame niisuguse miinori siis, kui $n-$järku detreminandile vastavas maatriksis vaatame nende ridade ja veergude ühiseid elemente, mis ei sisalda elementi a_{ij}.

Kasutades eespool olnud tähistust, saame determinandi elemendile a_{ij} vastava miinori M_{ij} esitada kujul

$$M_{ij} = M_{1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n}^{1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n}.$$

Maatriksi astak

Def Öeldakse, et maatriksi A astak on r, kui selle maatriksi elementidest saame moodustada vähemelt ühe nullist erineva $r-$järku miinori ja mitte ühtegi nullist erinevat $(r+1)-$järku miinorit.

Asjaolu, et maatriksi A astak on r tähistatakse $\mathrm{rank}(A) = r$.

Näide. Leida maatriksi A astak

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Näide. Leida maatriksi A astak

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kirjutame välja maatriksi A mõned miinord:

$$M_{1,3,4}^{2,3,6} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad M_{1,3,4}^{1,5,6} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad M_{1,3}^{2,5} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Kõik selle maatriksi neljandat järku miinorid on võrdsed nulliga, sest need peavad sisaldama teise rea elemente.

Näide. Leida maatriksi A astak

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kirjutame välja maatriksi A mõned miinord:

$$M_{1,3,4}^{2,3,6} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad M_{1,3,4}^{1,5,6} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad M_{1,3}^{2,5} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Kõik selle maatriksi neljandat järku miinorid on võrdsed nulliga, sest need peavad sisaldama teise rea elemente.
Järelikult maatrksi astak $\mathrm{rank}(A) = 3$. Paneme tähele, et maatriksi A astakut määrav miinor ei ole määratud üheselt.

Astakut määrava miinori paigutus

Üldisust kitsendamata võime eeldada, et maatriksi A astakut määrav miinor

$$M_r = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

paikneb maatriksi ülemises vasakus nurgas

$$A = \left(\begin{array}{|ccc|ccc} \hline a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1,\,r+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2r} & a_{2,\,r+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{r,\,r+1} & \dots & a_{rn} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mr} & a_{m,\,r+1} & \dots & a_{mn} \end{array} \right).$$

Rea- ja veeruvektorite omadused

Lause. Maatriksi reavektorid, mis vastavad astakut määravale miinorile, on lineaarselt sõltumatud; ülejäänud reavektorid avalduvad nende vektorite lineaarse kombinatsioonina.

Rea- ja veeruvektorite omadused

Lause. Maatriksi reavektorid, mis vastavad astakut määravale miinorile, on lineaarselt sõltumatud; ülejäänud reavektorid avalduvad nende vektorite lineaarse kombinatsioonina.

Tõestus. Olgu maatriksi A astak r. Tähistame astakut määravale miinorile vastavad reavektorid järgmiselt:

$$\vec{A}_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1r}, \ldots, a_{1n}),$$

$$\vec{A}_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2r}, \ldots, a_{2n}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\vec{A}_r = (a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{rr}, \ldots, a_{rn}).$$

Tõestuse jätk

Oletame väite vastaselt, et need vektorid on lineaarselt sõltuvad, so mittetriviaalne lineaarkombinatsioon

$$\alpha_1\vec{A}_1 + \alpha_2\vec{A}_2 + \ldots + \alpha_r\vec{A}_r = \vec{\theta}.$$

Oletame, et näteks kordaja $\alpha_1 \neq 0$.

Korrutame maatriksi A esimest rida α_1-ga ja liidame sellele juurde α_2 teise rea, siis α_3-kordse kolmanda rea, jne kuni α_r-kordse $r-$nda rea. Nüüd on teisendatud maatriksi esimese rea elementideks vektori

$$\alpha_1\vec{A}_1 + \alpha_2\vec{A}_2 + \ldots + \alpha_r\vec{A}_r$$

koordinaadid.

Tõestuse jätk

Seega

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 a_{11} + \ldots + \alpha_r a_{r1} & \ldots & \alpha_1 a_{1r} + \ldots + \alpha_r a_{rr} & \ldots & \alpha_1 a_{1n} + \ldots + \alpha_r a_{rn} \\ a_{21} & \ldots & a_{2r} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & \ldots & a_{rn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mr} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Tõestuse jätk

Lineaarse sõltuvuse tõttu on kõik selle maatriksi esimese reas olevad elemendid võrdsed nulliga

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2r} & a_{2,\,r+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{r,\,r+1} & \dots & a_{rn} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mr} & a_{m,\,r+1} & \dots & a_{mn} \end{array}\right),$$

millest järeldub, et maatriksi astak rank$(A) < r$, mis on vastuolus tingimusega rank$(A) = r$.
Järelikult maatriksi A reavektorid on lineaarselt sõltumatud.

Tõestuse jätk

Jääb veel näidata, et kui $\text{rank}(A) < m$, siis maatriksi A ülejäänud $(m - r)$ reavektorit avalduvad astakut määrava miinori reavektorite lineaarkombinatsioonina.

Tõestuse jätk

Jääb veel näidata, et kui rank$(A) < m$, siis maatriksi A ülejäänud $(m-r)$ reavektorit avalduvad astakut määrava miinori reavektorite lineaarkombinatsioonina. Moodustame $(r+1)-$järku determinandi

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1k} \\ a_{21} & \dots & a_{2r} & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rk} \\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & a_{ik} \end{vmatrix},$$

kus indeks $i \in \{r+1, r+2, \dots, m\}$ ja $k \in \{1, 2, \dots, r, \dots, n\}$.

Tõestuse jätk

Jääb veel näidata, et kui rank$(A) < m$, siis maatriksi A ülejäänud $(m-r)$ reavektorit avalduvad astakut määrava miinori reavektorite lineaarkombinatsioonina. Moodustame $(r+1)-$järku determinandi

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1k} \\ a_{21} & \ldots & a_{2r} & a_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & a_{rk} \\ a_{i1} & \ldots & a_{ir} & a_{ik} \end{vmatrix},$$

kus indeks $i \in \{r+1, r+2, \ldots, m\}$ ja $k \in \{1, 2, \ldots, r, \ldots, n\}$.

Kui $k \leqslant r$, siis on selles determinandis on kaks võrdset veergu ja determinandi omaduste põhjal $\Delta = 0$.

Tõestuse jätk

Uurime juhtumit, kui $k > r$.

Tõestuse jätk

Uurime juhtumit, kui $k > r$.

Siis determinant Δ on maatiksi A üheks $(r+1)$-järku miinoriks.

Tõestuse jätk

Uurime juhtumit, kui $k > r$.

Siis determinant Δ on maatiksi A üheks $(r+1)$-järku miinoriks.
Kuna rank$(A) = r$, siis maatriksi astaku definitsiooni tõttu $\Delta = 0$.

Tõestuse jätk

Uurime juhtumit, kui $k > r$.

Siis determinant Δ on maatiksi A üheks $(r+1)$-järku miinoriks. Kuna $\mathrm{rank}(A) = r$, siis maatriksi astaku definitsiooni tõttu $\Delta = 0$. Kirjutame välja determinandi Δ arenduse viimase veeru järgi:

$$a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{rk}A_{rk} + a_{ik}M_r = 0,$$

kus $M_r = A_{ik}$.

Tõestuse jätk

Uurime juhtumit, kui $k > r$.

Siis determinant Δ on maatiksi A üheks $(r+1)$-järku miinoriks.
Kuna rank$(A) = r$, siis maatriksi astaku definitsiooni tõttu $\Delta = 0$.
Kirjutame välja determinandi Δ arenduse viimase veeru järgi:

$$a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{rk}A_{rk} + a_{ik}M_r = 0,$$

kus $M_r = A_{ik}$.
Astaku tingimuse tõttu $M_r \neq 0$ ja viimase summa saame teisendada kujule:

$$a_{ik} = \alpha_1 a_{1k} + \alpha_2 a_{2k} + \ldots + \alpha_r a_{rk} \quad k \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

kus $\alpha_1 = -\dfrac{A_{1k}}{M_r}, \alpha_2 = -\dfrac{A_{2k}}{M_r}, \ldots, \alpha_r = -\dfrac{A_{rk}}{M_r}$.

Tõestuse lõpp

Viimastest valemitest järeldub, et maatriksi A reavektor

$$\vec{A}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$$

avaldub vektorite astakut määrava miinori reavektoritr lineaarse kombinatsioonina

$$\vec{A}_i = \alpha_1 \vec{A}_1 + \alpha_2 \vec{A}_2 + \ldots + \alpha_r \vec{A}_r, .$$

kus $i \in \{r+1, r+2, \ldots, m\}$.

Rea- ja veeruvektorite omadused

Lause. Maatriksi veeruvektorid, mis vastavad astakut määravale miinorile, on lineaarselt sõltumatud; ülejäänud veeruvektorid avalduvad nende vektorite lineaarse kombinatsioonina.

Rea- ja veeruvektorite omadused

Lause. Maatriksi veeruvektorid, mis vastavad astakut määravale miinorile, on lineaarselt sõltumatud; ülejäänud veeruvektorid avalduvad nende vektorite lineaarse kombinatsioonina.

Lause. Maatriksi lineaarselt sõltumatute rea- ja veeruvektorite arv on võrdne.