Lineaarsed võrrandisüsteemid

Lineaarse võrrandisüsteemi mõiste

Mati Väljas

mati.valjas@ttu.ee

Tallinna Tehnikaülikool

Lineaarse võrrandisüsteemi mõiste

Lineaarseks võrrandisüsteemiks üle reaalarvude hulga $\mathbb{R}$ nimetatakse lineaarsetest võrranditest koosnevat süsteemi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

kus $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$.

Lineaarse võrrandisüsteemiga seotud maatriksid

Muutujate x_i kordajatest moodustatud maatriksit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nimetatakse ***võrrandisüsteemi süsteemimaatriksiks***.

Lineaarse võrrandisüsteemiga seotud maatriksid

Muutujate x_i kordajatest moodustatud maatriksit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nimetatakse ***võrrandisüsteemi süsteemimaatriksiks***.

Maatriksit

$$A_L = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

nimetatakse ***võrrandisüsteemi laiendatud maatriksiks***.

Lineaarse võrrandisüsteemi maatrikskuju

Muutujatest ja vabaliikmetest moodustame üheveerulised maatriksid

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Lineaarse võrrandisüsteemi maatrikskuju

Muutujatest ja vabaliikmetest moodustame üheveerulised maatriksid

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Kasutades neid maatrikseid võime lineaarse võrrandisüsteemi esitada maatrikskujul:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

ehk lühidalt $AX = B$.

Lineaarse võrrandisüsteemi vektorkuju

Moodustame süsteemimaatriksi A veegudest üheveerulised maatriksid

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \; \dots \; , A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Maatrikseid $A_1, A_2, \dots, A_n$ võime tõlgndada ruumi $\mathbb{R}^m$ vektoritena.

Lineaarse võrrandisüsteemi vektorkuju

Moodustame süsteemimaatriksi A veegudest üheveerulised maatriksid

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \; \dots \; , A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Maatrikseid $A_1, A_2, \dots, A_n$ võime tõlgndada ruumi $\mathbb{R}^m$ vektoritena.
Nüüd võime lineaarse võrrandisüsteemi esitada kujul:

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n = B,$$

so vektorite (maatriksite) $A_1, A_2, \dots, A_n$ lineaarse kombinatsioonina. Seda võrdust nimetatakse lineaarse ***võrrandisüsteemi vektorkujuks***.

Lineaarse võrrandisüsteemi lahend

Vektorit $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ nimetatakse võrrandisüsteemi lahendiks, kui kõik võrdused

$$a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + \ldots + a_{in}\xi_n = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

on tõesed.

Lineaarse võrrandisüsteemi lahend

Vektorit $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ nimetatakse võrrandisüsteemi lahendiks, kui kõik võrdused

$$a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + \ldots + a_{in}\xi_n = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

on tõesed.

Def. Lineaarset võrrandisüsteemi, millel leidub vähemalt üks laend, nimetatakse ***kooskõlaliseks võrrandisüsteemiks***.

Lineaarse võrrandisüsteemi lahend

Vektorit $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ nimetatakse võrrandisüsteemi lahendiks, kui kõik võrdused

$$a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + \ldots + a_{in}\xi_n = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

on tõesed.

Def. Lineaarset võrrandisüsteemi, millel leidub vähemalt üks laend, nimetatakse ***kooskõlaliseks võrrandisüsteemiks***.

Def. Lineaarset võrrandisüsteemi, millel lahendid puuduvad, nimetatakse ***vastuoluliseks*** ehk ***mittekooskõlaliseks võrrandisüsteemiks***.

Lineaarne homogeene võrrandisüsteem

Lineaarset võrrandisüsteemi, mille kõik vabaliikmed on võrdsed nulliga, nimetatakse ***homogeenseks***, st

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

kus $a_{ij} \in \mathbb{R}$.
Kasutades lineaarse võrrandisüsteemi maatrikskuju saame homogeense võrrandisüsteemi esitada kujul

$$AX = \Theta,$$

kus $\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}^T$.

Crameri valemid

Vaatleme lineaarset võrrandisüsteemi, milles võrrandite ja muutujate on võrdne

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Crameri valemid

Vaatleme lineaarset võrrandisüsteemi, milles võrrandite ja muutujate on võrdne

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Kasutades süsteemimaatriksit ja maatrikseid võime võrrandisüsteemi esitada maatrikskujul:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix},$$

Crameri valemid

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

ehk lühidalt

$$AX = B.$$

Crameri valemid

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

ehk lühidalt

$$AX = B.$$

Seda võrrandisüsteemi võime vaadelda kui maatriksvõrrandit. Eeldame, et maatriks A on regulaarne, so $|A| \neq 0$. Siis maatriksvõrrandi lahend on

$$X = A^{-1}B.$$

Crameri valemid

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

ehk lühidalt

$$AX = B.$$

Seda võrrandisüsteemi võime vaadelda kui maatriksvõrrandit. Eeldame, et maatriks A on regulaarne, so $|A| \neq 0$. Siis maatriksvõrrandi lahend on

$$X = A^{-1}B.$$

Maatriks $A^{-1}B$ on selle süsteemi lahend, sest $A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = B$.

Crameri valemid

Pöördmaatriksi leidmise eeskirja põhjal

$$X = \frac{1}{|A|}\tilde{A}B$$

Crameri valemid

Pöördmaatriksi leidmise eeskirja põhjal

$$X = \frac{1}{|A|}\tilde{A}B$$

ehk pikemalt

$$X = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n \end{pmatrix}.$$

Crameri valemid

Kirjutame välja maatriksi A determinandi arenduse esimese veeru järgi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + \dots + A_{n1}a_{n1}$$

Crameri valemid

Kirjutame välja maatriksi A determinandi arenduse esimese veeru järgi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + \ldots + A_{n1}a_{n1}$$

ja võrdleme seda arendust viimase maatriksi esimese elemendiga, saame

$$A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta x_1.$$

Crameri valemid

Analoogiliselt leiame, et

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \dots \\ \Delta x_n \end{pmatrix}$$

ehk

$$x_i = \frac{\Delta x_i}{|A|}, \quad \text{kus} \quad \Delta x_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,\,i-1} & b_1 & a_{1,\,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & \dots & a_{2,\,i-1} & b_2 & a_{2,\,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,\,i-1} & b_n & a_{n,\,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Neid valemeid nimetatakse ***Crameri valemiteks***.

Crameri valemid

Crameri valemid võimaldavad leida võrrandisüsteemi lahendi juhul, kui süsteemimaatriks A on regulaarne.