Maatriksid

Pöördmaatriks ja maatriksvõrrandid

Mati Väljas

`mati.valjas@ttu.ee`

Tallinna Tehnikaülikool

Adjungeeritud maatriks

Olgu antud ruutmaatriks

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Adjungeeritud maatriks

Olgu antud ruutmaatriks

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Def. Ruutmaatriksi A elementide a_{ij} alamdeterminantidest A_{ij} moodustatud maatriksit

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

nimetatakse ***adjungeeritud maatriksiks***.

Adjungeeritud maatriks

Arvutame maatriksite A ja $\tilde{A}$ korrutise ning kasutades determinantide teooria põhivalemt saame:

$$A\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{2k} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{nk} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}A_{1k} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}A_{2k} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}A_{nk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk}A_{1k} & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}A_{2k} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}A_{nk} \end{pmatrix} =$$

Adjungeeritud maatriks

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}A_{1k} & \sum_{k=1}^n a_{1k}A_{2k} & \ldots & \sum_{k=1}^n a_{1k}A_{nk} \\ \sum_{k=1}^n a_{2k}A_{1k} & \sum_{k=1}^n a_{2k}A_{2k} & \ldots & \sum_{k=1}^n a_{2k}A_{nk} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum_{k=1}^n a_{nk}A_{1k} & \sum_{k=1}^n a_{nk}A_{2k} & \ldots & \sum_{k=1}^n a_{nk}A_{nk} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & |A| & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & |A| \end{pmatrix}.$$

Adjungeeritud maatriks

Seega

$$A\tilde{A} = |A| \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = |A|E.$$

Arvutades korrutise $\tilde{A}A$, näeme, et maatriksi ja tema adjungeeritud maatriksi korrutis on kommutatiivne, so

$$\tilde{A}A = A\tilde{A} = E|A|.$$

Pöördmaatriks

Def. Ruutrmaatriksi A pöördmaatriksiks nimetatakse maatriksit A^{-1}, mille korral

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Pöördmaatriks

Def. Ruutrmaatriksi A pöördmaatriksiks nimetatakse maatriksit A^{-1}, mille korral

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Seega pöördmaatriksi A^{-1} ja adjungeeritud maatriksi vaheline seos avaldub kujul

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}.$$

Pöördmaatriks

Def. Ruutrmaatriksi A pöördmaatriksiks nimetatakse maatriksit A^{-1}, mille korral

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Seega pöördmaatriksi A^{-1} ja adjungeeritud maatriksi vaheline seos avaldub kujul

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}.$$

Järelikult, pöördmaatriks leidub ainult regulaarsetel ruutmaatriksitel.

Pöördmaatriksi ühesus

Lause. Regulaarmaatriksi pöördmaatriks on määratud üheselt.

Pöördmaatriksi ühesus

Lause. Regulaarmaatriksi pöördmaatriks on määratud üheselt.

Oletame väite vastaselt, et leidub niisugune maatriks B, et

$$AB = BA = E.$$

Pöördmaatriksi ühesus

Lause. Regulaarmaatriksi pöördmaatriks on määratud üheselt.

Oletame väite vastaselt, et leidub niisugune maatriks B, et

$$AB = BA = E.$$

Siis kasutades maatrikite korrutamise assotsiatiivsuse omadust:

$$\left.\begin{array}{l} A^{-1}(AB) = A^{-1}(E) = A^{-1} \\ A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = B \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad B = A^{-1},$$

Pöördmaatriksi ühesus

Lause. Regulaarmaatriksi pöördmaatriks on määratud üheselt.

Oletame väite vastaselt, et leidub niisugune maatriks B, et

$$AB = BA = E.$$

Siis kasutades maatrikite korrutamise assotsiatiivsuse omadust:

$$\left.\begin{aligned} A^{-1}(AB) &= A^{-1}(E) = A^{-1} \\ A^{-1}(AB) &= (A^{-1}A)B = B \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad B = A^{-1},$$

$$\left.\begin{aligned} (BA)A^{-1} &= (E)A^{-1} = A^{-1} \\ (BA)A^{-1} &= B(AA^{-1}) = B \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad B = A^{-1}.$$

Pöördmaatriksi omadused

Maatriksi A pöördmaatriksil on A^{-1} järgmised omadused:

Pöördmaatriksi omadused

Maatriksi A pöördmaatriksil on A^{-1} järgmised omadused:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$.

Pöördmaatriksi omadused

Maatriksi A pöördmaatriksil on A^{-1} järgmised omadused:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$.

Tõestus. Sest $(A^{-1})^{-1}$ ainuke maatriks, mille korral

$$(A^{-1})^{-1}A^{-1} = E \quad \Rightarrow A = (A^{-1})^{-1}.$$

Pöördmaatriksi omadused

Maatriksi A pöördmaatriksil on A^{-1} järgmised omadused:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$.

Tõestus. Sest $(A^{-1})^{-1}$ ainuke maatriks, mille korral

$$(A^{-1})^{-1}A^{-1} = E \quad \Rightarrow A = (A^{-1})^{-1}.$$

2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Pöördmaatriksi omadused

Maatriksi A pöördmaatriksil on A^{-1} järgmised omadused:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$.

Tõestus. Sest $(A^{-1})^{-1}$ ainuke maatriks, mille korral

$$(A^{-1})^{-1}A^{-1} = E \quad \Rightarrow A = (A^{-1})^{-1}.$$

2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Arvutame korrutise

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = E \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Pöördmaatriksi omadused

3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Pöördmaatriksi omadused

3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Tõestus. Transponeerime maatriksite korrutist $AA^{-1} = E$:

$$(AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = E \quad \Rightarrow \quad (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

Pöördmaatriksi omadused

3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Tõestus. Transponeerime maatriksite korrutist $AA^{-1} = E$:

$$(AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = E \quad \Rightarrow \quad (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

4. $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}, \quad$ kus $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pöördmaatriksi omadused

3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Tõestus. Transponeerime maatriksite korrutist $AA^{-1} = E$:

$$(AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = E \quad \Rightarrow \quad (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

4. $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}, \quad$ kus $\lambda \in \mathbb{R}$.

Tõestus. Arvutame korrutise:

$$(\lambda^{-1} A^{-1})(\lambda A) = \lambda^{-1}\lambda(A^{-1}A) = E \quad \Rightarrow \quad (\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}.$$

Pöördmaatriksi omadused

3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Tõestus. Transponeerime maatriksite korrutist $AA^{-1} = E$:

$$(AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = E \quad \Rightarrow \quad (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

4. $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}, \quad$ kus $\lambda \in \mathbb{R}$.

Tõestus. Arvutame korrutise:

$$(\lambda^{-1} A^{-1})(\lambda A) = \lambda^{-1}\lambda(A^{-1}A) = E \quad \Rightarrow \quad (\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}.$$

5. $E^{-1} = E$.

Pöördmaatriksi omadused

3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Tõestus. Transponeerime maatriksite korrutist $AA^{-1} = E$:

$$(AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = E \quad \Rightarrow \quad (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

4. $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$,   kus $\lambda \in \mathbb{R}$.

Tõestus. Arvutame korrutise:

$$(\lambda^{-1}A^{-1})(\lambda A) = \lambda^{-1}\lambda(A^{-1}A) = E \quad \Rightarrow \quad (\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}.$$

5. $E^{-1} = E$.
6. $|A||A|^{-1} = 1$.

Maatriksvõrrandid

Olgu A ja B $n-$järku ruutmaatriksid, kusjuures $|A| \neq 0$. Seame ülesandeks leida niisugune maatriks X, et

$$AX = B.$$

Maatriksvõrrandid

Olgu A ja B $n-$järku ruutmaatriksid, kusjuures $|A| \neq 0$. Seame ülesandeks leida niisugune maatriks X, et

$$AX = B.$$

Selleks korrutame selle võrrandi mõlemat poolt vasakult maatriksi A pöördmaatriksiga A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \qquad \Rightarrow \qquad X = A^{-1}B.$$

Maatriksvõrrandid

Olgu A ja B $n-$järku ruutmaatriksid, kusjuures $|A| \neq 0$. Seame ülesandeks leida niisugune maatriks X, et

$$AX = B.$$

Selleks korrutame selle võrrandi mõlemat poolt vasakult maatriksi A pöördmaatriksiga A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \qquad \Rightarrow \qquad X = A^{-1}B.$$

Maatriksvõrrandi

$$XA = B$$

lahendamiseks korrutame võrrandi mõlemat poolt paremalt maatriksi A pöördmaatriksiga A^{-1}:

$$XAA^{-1} = BA^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad X = BA^{-1}.$$

Maatriksvõrrandid

Tuginedes võrrandite $AX = B$ ja $XA = B$ lahendite leidmisele, saame:

$$AXB = C \qquad \Rightarrow \qquad X = A^{-1}CB^{-1}.$$

Maatriksvõrrandid

Tuginedes võrrandite $AX = B$ ja $XA = B$ lahendite leidmisele, saame:

$$AXB = C \qquad \Rightarrow \qquad X = A^{-1}CB^{-1}.$$

Selgitame, millistel tingimustel võrrandite $AX = B$ ja $XA = B$ lahendid langevad kokku, st missugusel tingimusel kehtib võrdus

$$A^{-1}B = BA^{-1}.$$

Maatriksvõrrandid

Tuginedes võrrandite $AX = B$ ja $XA = B$ lahendite leidmisele, saame:

$$AXB = C \qquad \Rightarrow \qquad X = A^{-1}CB^{-1}.$$

Selgitame, millistel tingimustel võrrandite $AX = B$ ja $XA = B$ lahendid langevad kokku, st missugusel tingimusel kehtib võrdus

$$A^{-1}B = BA^{-1}.$$

Korrutame seda tingimust vasakult ja paremalt maatriksiga A

$$A(A^{-1}B)A = A(BA^{-1})A \quad \Rightarrow \quad (AA^{-1})BA = AB(A^{-1}A),$$

$$BA = AB.$$

Maatriksvõrrandid

Tuginedes võrrandite $AX = B$ ja $XA = B$ lahendite leidmisele, saame:

$$AXB = C \qquad \Rightarrow \qquad X = A^{-1}CB^{-1}.$$

Selgitame, millistel tingimustel võrrandite $AX = B$ ja $XA = B$ lahendid langevad kokku, st missugusel tingimusel kehtib võrdus

$$A^{-1}B = BA^{-1}.$$

Korrutame seda tingimust vasakult ja paremalt maatriksiga A

$$A(A^{-1}B)A = A(BA^{-1})A \quad \Rightarrow \quad (AA^{-1})BA = AB(A^{-1}A),$$

$$BA = AB.$$

Järelikult, kui maatriksvõrrandite $AX = B$ ja $XA = B$ lahendid langevad kokku, siis maatriksite A ja B korrutamine on kommutatiivne.

Maatriksvõrrandid

Oletame, et $BA = AB$ ja korrutame seda seost vasakult ning paremalt maatriksiga A^{-1}

$$A^{-1}BAA^{-1} = A^{-1}ABA^{-1} \quad \Rightarrow \quad A^{-1}B = BA^{-1}.$$

Maatriksvõrrandid

Oletame, et $BA = AB$ ja korrutame seda seost vasakult ning paremalt maatriksiga A^{-1}

$$A^{-1}BAA^{-1} = A^{-1}ABA^{-1} \quad \Rightarrow \quad A^{-1}B = BA^{-1}.$$

Seega kommutatiivsuse nõudest järeldub maatriksvõrrandite lahendi kokkulangevuse tingimus.

Maatriksvõrrandid

Oletame, et $BA = AB$ ja korrutame seda seost vasakult ning paremalt maatriksiga A^{-1}

$$A^{-1}BAA^{-1} = A^{-1}ABA^{-1} \quad \Rightarrow \quad A^{-1}B = BA^{-1}.$$

Seega kommutatiivsuse nõudest järeldub maatriksvõrrandite lahendi kokkulangevuse tingimus.

Lause. Regulaarse maatriksi A korral langevad maatriksvõrrandite $AX = B$ ja $XA = B$ lahendid kokku parajasti siis, kui maatriksite A ja B korrutis on kommutatiivne.