Determinandid

Determinantide arendusvalemid

Mati Väljas

mati.valjas@ttu.ee

Tallinna Tehnikaülikool

Determinant

Olgu antud determinant

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Alamdeterminant

Def. Determinandi $|A|$ elemendi a_{ij} ***algebraliseks täendiks*** ehk ***alamdeterminandiks*** nimetatakse determinati

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Arendusteoreem

Lause. Determinat on võrdne rea (veeru) elementide ja nende algebraliste täiendite korrutiste summaga.
Tõestus.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} + 0 + \ldots + 0 & \ldots & 0 + \ldots + a_{ij} + \ldots + 0 & \ldots & 0 + \ldots + a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

Tõestus

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots$$

$$\dots + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Tõestus

Kasutades omadust võime igas liidetavas ühise teguri tuua determinandi märgi ette:

$$|A| = a_{i1}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + a_{ij}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots$$

$$\dots + a_{in}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Tõestus

Kasutades omadust saame i-nda rea elemendi 1 kohale ja alla jäävad elemendid teisendada nullideks. Vaatame konkteetsuse mõttes esimeses liidetavas olevat determinanti. Liidame selle esimese rea elementidele juurde $-a_{11}$ kordse i-nda rea, teisele reale $-a_{21}$ kordse i-nda rea, $\ldots$, viimasele reale $-a_{n1}$ kordse i-nda rea, seega:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = A_{i1}$$

Tõestus

Analoogiliselt, kõik ülejäänud liidetavateks olevad determinandid on võrdsed elemendile vastava algebralise täendiga, järelikult:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{ij}A_{ij} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip}A_{ip}.$$

Tõestus

Analoogiliselt, kõik ülejäänud liidetavateks olevad determinandid on võrdsed elemendile vastava algebralise täendiga, järelikult:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{ij}A_{ij} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip}A_{ip}.$$

Seda valemit nimetatakse determinandi arendusvalemiks $i-$nda rea järgi.

Tõestus

Analoogiliselt, kõik ülejäänud liidetavateks olevad determinandid on võrdsed elemendile vastava algebralise täendiga, järelikult:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{ij}A_{ij} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip}A_{ip}.$$

Seda valemit nimetatakse determinandi arendusvalemiks $i-$nda rea järgi.

Arendusvalem $j-$nda veeru järgi on kujul:

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + \ldots + a_{ij}A_{ij} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{p=1}^{n} a_{pj}A_{pj}.$$

Determinantide teooria põhivalemid

Asendame arendusvalemis $i-$nda rea elemnendid $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ vastavate elementidega $k-$ndast reast $a_{k1}, \ldots, a_{kn}$, seega

$$a_{k1}A_{i1} + \ldots + a_{kj}A_{ij} + \ldots + a_{kn}A_{in} = \sum_{p=1}^{n} a_{kp}A_{ip} = 0,$$

kuna kirjeldatud summa esitab determinandi, milles on kaks võrdset rida.

Determinantide teooria põhivalemid

Asendame arendusvalemis $i-$nda rea elemnendid $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ vastavate elementidega $k-$ndast reast $a_{k1}, \ldots, a_{kn}$, seega

$$a_{k1}A_{i1} + \ldots + a_{kj}A_{ij} + \ldots + a_{kn}A_{in} = \sum_{p=1}^{n} a_{kp}A_{ip} = 0,$$

kuna kirjeldatud summa esitab determinandi, milles on kaks võrdset rida.

Need arendusvalemid saame kokku võtta järgmiselt:

$$a_{i1}A_{k1} + \ldots + a_{ij}A_{kj} + \ldots + a_{in}A_{kn} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip}A_{kp} = |A|\delta_{ik}.$$

Determinantide teooria põhivalemid

Need arendusvalemid saame kokku võtta järgmiselt:

$$a_{i1}A_{k1} + \ldots + a_{ij}A_{kj} + \ldots + a_{in}A_{kn} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip}A_{kp} = |A|\delta_{ik}.$$

Determinantide teooria põhivalemid

Need arendusvalemid saame kokku võtta järgmiselt:

$$a_{i1}A_{k1} + \ldots + a_{ij}A_{kj} + \ldots + a_{in}A_{kn} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip}A_{kp} = |A|\delta_{ik}.$$

Kuna determinandi read ja veerud on samaväärsed, siis kehtib samasugune valem veergude jaoks

$$a_{1i}A_{1k} + \ldots + a_{jk}A_{jk} + \ldots + a_{ni}A_{ni} = \sum_{p=1}^{n} a_{pi}A_{pk} = |A|\delta_{ik}.$$

Determinantide teooria põhivalemid

Need arendusvalemid saame kokku võtta järgmiselt:

$$a_{i1}A_{k1} + \ldots + a_{ij}A_{kj} + \ldots + a_{in}A_{kn} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip}A_{kp} = |A|\delta_{ik}.$$

Kuna determinandi read ja veerud on samaväärsed, siis kehtib samasugune valem veergude jaoks

$$a_{1i}A_{1k} + \ldots + a_{jk}A_{jk} + \ldots + a_{ni}A_{ni} = \sum_{p=1}^{n} a_{pi}A_{pk} = |A|\delta_{ik}.$$

Neid valemeid nimetatakse ***determinantide teooria põhivalemiteks***.

Miinor

Def. Determinandi $|A|$ elemendile a_{ij} vastavaks ***miinoriks*** nimetatakse determinanti, mis saadakse esialgsest determinandist $i-nda$ rea ja $j-$nda veeru elementide ära jätmisel, so

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Miinori ja alamdeterminandi seos

Võrreldes elemendile a_{ij} vastava alamdeterminandi A_{ij} ja miinori M_{ij} elemente, näeme, et suur osa neist langevad kokku. Seetõttu tekib küsimus, kuidas on omavahel seotud alamdeterminant ja miinor. Uurime kõigepealt elemendile a_{11} vastavat alamdeterminanti

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\mathbb{P}_n} (-1)^\sigma a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} \dots a_{n\alpha_n} =$$

$$= \sum_{\mathbb{P}_{n-1}} (-1)^\tau 1 a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} \dots a_{n\alpha_n} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = M_{11},$$

Miinori ja alamdeterminandi seos

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\mathbb{P}_n} (-1)^\sigma a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} \dots a_{n\alpha_n} =$$

$$= \sum_{\mathbb{P}_{n-1}} (-1)^\tau 1 a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3} \dots a_{n\alpha_n} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = M_{11},$$

kus $\mathbb{P}_{n-1}$ on elementidest $(2, 3, ..., n)$ moodustatud permutatsioonide hulk ja $\tau = \text{inv}(\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$. Järelikult elemendile a_{11} vastava algebralise täiendi ja miinori korral kehtib võrdus $A_{11} = M_{11}$.

Miinori ja alamdeterminandi seos

Uurime järgnevalt elemendile a_{ij} vastava alamdeterminandi A_{ij} ja miinori M_{ij} vahelist seost.

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

Miinori ja alamdeterminandi seos

$$= (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

Miinori ja alamdeterminandi seos

$$= (-1)^{i-1}(-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Miinori ja alamdeterminandi seos

Pärast lihtsustamist ja esimese rea ning veeru elementide ära jätmist saame

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Miinori ja alamdeterminandi seos

Pärast lihtsustamist ja esimese rea ning veeru elementide ära jätmist saame

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i-1,1} & \ldots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \ldots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \ldots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Järelikult elemendi a_{ij} algebralise täiendi ja miinori vaheline seos on:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Arenusvalem miinorite kaudu

Kasutades leitud seost saame arendusvalemid esitada kujul

$$|A| = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{i+p} a_{ip} M_{ip}.$$

$$|A| = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+j} a_{pj} M_{pj}.$$

Omadus 8

Arendades determinanti, mille kõik elemendid peadiagonaali all on nullid, esimese veeru järgi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \dots = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$