# *Determinandid*

# *Determinandi mõiste ja omadused*

Mati Väljas

mati.valjas@ttu.ee

Tallinna Tehnikaülikool

## Permutatsiooni mõiste

**Def.** Lõpliku hulga $H$ elementide ümberjärjestust, milles hulga $H$ iga element esineb täpselt üks kord, nimetatakse hulga $H$ permutatsiooniks.

## Permutatsiooni mõiste

**Def.** Lõpliku hulga $H$ elementide ümberjärjestust, milles hulga $H$ iga element esineb täpselt üks kord, nimetatakse hulga $H$ permutatsiooniks.

Rõhutame, et hulgateoorias hulga $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ elementide järjestus ei ole oluline, kuid selle hulga elementidest moodustatud permutatsioonide korral on elementide paigutus oluline.

## Permutatsiooni mõiste

**Def.** Lõpliku hulga $H$ elementide ümberjärjestust, milles hulga $H$ iga element esineb täpselt üks kord, nimetatakse hulga $H$ permutatsiooniks.

Rõhutame, et hulgateoorias hulga $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ elementide järjestus ei ole oluline, kuid selle hulga elementidest moodustatud permutatsioonide korral on elementide paigutus oluline.

Vaatleme järgnevalt hulka $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Selle hulga elementidest moodustatud permutatsiooni tähistatakse

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n),$$

kus $\alpha_i \in \mathbb{N}_n$ ja indeks $i$ fikseerib elemendi $\alpha_i$ asukoha permutatsioonis.

## Permutatsioonide arv

**Lause.** Hulga $\mathbb{N}_n$ elementidest saab moodustada $n!$ permutatsiooni.

# Permutatsioonide arv

**Lause.** Hulga $\mathbb{N}_n$ elementidest saab moodustada $n!$ permutatsiooni.

*Tõestus.* Permutatsiooni $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n)$ esimese elemendi $\alpha_1$ valimiseks on $n$ võimalust, elemendi $\alpha_2$ valimiseks on $n-1$ võimalust.

## Permutatsioonide arv

**Lause.** Hulga $\mathbb{N}_n$ elementidest saab moodustada $n!$ permutatsiooni.

*Tõestus.* Permutatsiooni $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n)$ esimese elemendi $\alpha_1$ valimiseks on $n$ võimalust, elemendi $\alpha_2$ valimiseks on $n-1$ võimalust.

Vastavalt korrutamisreeglile on permutatsiooni esimese ja teise elemendi valimiseks $n(n-1)$ võimalust jne.

## Permutatsioonide arv

**Lause.** Hulga $\mathbb{N}_n$ elementidest saab moodustada $n!$ permutatsiooni.

*Tõestus.* Permutatsiooni $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n)$ esimese elemendi $\alpha_1$ valimiseks on $n$ võimalust, elemendi $\alpha_2$ valimiseks on $n-1$ võimalust.

Vastavalt korrutamisreeglile on permutatsiooni esimese ja teise elemendi valimiseks $n(n-1)$ võimalust jne.

Tähistades hulga $\mathbb{N}_n$ permutatsioonide arvu $P(n)$, siis eespool öeldust järeldub, et

$$P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

## Permutatsioonide arv

**Lause.** Hulga $\mathbb{N}_n$ elementidest saab moodustada $n!$ permutatsiooni.

*Tõestus.* Permutatsiooni $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n)$ esimese elemendi $\alpha_1$ valimiseks on $n$ võimalust, elemendi $\alpha_2$ valimiseks on $n-1$ võimalust.

Vastavalt korrutamisreeglile on permutatsiooni esimese ja teise elemendi valimiseks $n(n-1)$ võimalust jne.

Tähistades hulga $\mathbb{N}_n$ permutatsioonide arvu $P(n)$, siis eespool öeldust järeldub, et

$$P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Hulga $\mathbb{N}_n$ kõikvõimalike permutatsioonide hulka tähistame $\mathbb{P}_n$.

## Inversiooni mõiste

**Näide.** Järelikult $\mathbb{N}_3 = \{1, 2, 3\}$ korral

$$\mathbb{P}_3 = \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (2, 1, 3), (1, 3, 2), (3, 2, 1)\}.$$

## Inversiooni mõiste

**Näide.** Järelikult $\mathbb{N}_3 = \{1, 2, 3\}$ korral

$$\mathbb{P}_3 = \{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2),(2,1,3),(1,3,2),(3,2,1)\}.$$

**Def.** Öeldakse, et permutatsioonis

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots \alpha_n)$$

elemendid $\alpha_i$ ja $\alpha_j$ moodustavad ***inversiooni*** kui

$$\alpha_i > \alpha_j \quad (i < j),$$

st suurem element paikneb eespool.

## Paaris- ja paaritu permutatsioon

Permutatsiooni, mille inversioonde arv on paarisarv (paaritu arv), nimetatakse ***paarispermutatsiooniks*** (***paarituks permutatsiooniks***).

# Paaris- ja paaritu permutatsioon

Permutatsiooni, mille inversioonde arv on paarisarv (paaritu arv), nimetatakse ***paarispermutatsiooniks*** (***paarituks permutatsiooniks***).

Permutatsiooni kahe elemendi ümberpaigutamisel muutub selle paarsus vastupidiseks.

# Paaris- ja paaritu permutatsioon

Permutatsiooni, mille inversioonde arv on paarisarv (paaritu arv), nimetatakse ***paarispermutatsiooniks*** (***paarituks permutatsiooniks***).

Permutatsiooni kahe elemendi ümberpaigutamisel muutub selle paarsus vastupidiseks.

Hulga $\mathbb{P}_n$ paaris ja paaritute permutatsioonide arv on võrdne, see on

$$\frac{n!}{2}.$$

## Determinandi definitsioon

**Def.** Olgu $A = (a_{ij})$ reaalarvuliste elementidega $n$-järku ruutmaatriks. Ruutmaatriksi $A$ determinandiks nimetatakse reaalarvu $|A|$, mis leitakse vastavalt eeskirjale

$$|A| = \sum_{\mathbb{P}_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}.$$

# Determinandi definitsioon

**Def.** Olgu $A = (a_{ij})$ reaalarvuliste elementidega $n$-järku ruutmaatriks. Ruutmaatriksi $A$ determinandiks nimetatakse reaalarvu $|A|$, mis leitakse vastavalt eeskirjale

$$|A| = \sum_{\mathbb{P}_n} (-1)^{\text{inv}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}.$$

| $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | inv$(\alpha_1, \alpha_2)$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 0 |
| 2 | 1 | 1 |

## Determinandi definitsioon

**Def.** Olgu $A = (a_{ij})$ reaalarvuliste elementidega $n$-järku ruutmaatriks. Ruutmaatriksi $A$ determinandiks nimetatakse reaalarvu $|A|$, mis leitakse vastavalt eeskirjale

$$|A| = \sum_{\mathbb{P}_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}.$$

| $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | inv$(\alpha_1, \alpha_2)$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 0 |
| 2 | 1 | 1 |

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{\mathrm{inv}(1,2)} a_{11}a_{22} + (-1)^{\mathrm{inv}(2,1)} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

# TÄHELEPANU EKSAM!

Eksamil tuletada definitsioonist kolmandat järku determinandi arvutamise reegel.

# Determinandi omadused

**Om 1.** Determinat, mille migis reas (veeru) kõik elemendid on nullid, on võrdne nulliga.

## Determinandi omadused

**Om 1.** Determinat, mille migis reas (veeru) kõik elemendid on nullid, on võrdne nulliga.

*Tõestus.* Oletame, et deteminandi $i-$nda reas on nullid

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\mathbb{P}_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{i\alpha_i} \dots a_{n\alpha_n} =$$

$$= \sum_{\mathbb{P}_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots 0 \dots a_{n\alpha_n} = \underbrace{0 + \dots + 0}_{n!\ liidetavat} = 0,$$

sest kõik $i-$nda rea elemendid $a_{i\alpha_i} = 0$.

## Determinandi omadused

**Om 2.** Deteminandi reast (veerust) võib ühise teguri tuua determinandi märgi ette.

## Determinandi omadused

**Om 2.** Deteminandi reast (veerust) võib ühise teguri tuua determinandi märgi ette.

*Tõestus.* Oletame, et determinandi $i-$nda elemendid on teguri $\lambda$ kordsed, tuleb tõestada, et kehtib võrdus:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

## Determinandi omadused

**Om 2.** Deteminandi reast (veerust) võib ühise teguri tuua determinandi märgi ette.

*Tõestus.* Oletame, et determinandi $i-$nda elemendid on teguri $\lambda$ kordsed, tuleb tõestada, et kehtib võrdus:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$\sum_{\mathbb{P}_n} (-1)^{\text{inv}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots \lambda a_{i\alpha_i} \dots a_{n\alpha_n} =$$

$$= \lambda \sum_{\mathbb{P}_n} (-1)^{\text{inv}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{i\alpha_i} \dots a_{n\alpha_n}.$$

## Determinandi omadused

**Om 3.** Determinant, mille mingi rea (veeru) kõik elemendid koosnevad kahest liidetavast, siis determinant avaldub kahe determinandi summana, kus esimese determinandi rida (veerg) koosneb esimestest liidetavatest ja teise determinandi rida (veerg) kooseneb teistest liidetavatest, kõik ülejäänud read (veerud) jäävad muutumatuteks.

## Determinandi omadused

**Om 3.** Determinant, mille mingi rea (veeru) kõik elemendid koosnevad kahest liidetavast, siis determinant avaldub kahe determinandi summana, kus esimese determinandi rida (veerg) koosneb esimestest liidetavatest ja teise determinandi rida (veerg) kooseneb teistest liidetavatest, kõik ülejäänud read (veerud) jäävad muutumatuteks.

*Tõestus.* Oletame, et determinandi $i-$nda elemendid on esitatud summana $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$ so

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & \dots & b_{in} + c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

# Determinandi omadused

On vaja tõestada, et

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \dots & b_{in}+c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

## Determinandi omadused

Kasutame tõestatava võrduse vasakul pool oleva determinandi jaoks definitsiooni:

$$\sum_{\mathbb{P}_n}(-1)^{\mathrm{inv}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots(b_{i\alpha_i}+c_{i\alpha_i})\ldots a_{n\alpha_n}=$$

$$=\sum_{\mathbb{P}_n}(-1)^{\mathrm{inv}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots b_{i\alpha_i}\ldots a_{n\alpha_n}+$$

$$+\sum_{\mathbb{P}_n}(-1)^{\mathrm{inv}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots c_{i\alpha_i}\ldots a_{n\alpha_n}.$$

# Determinandi omadused

Kasutame tõestatava võrduse vasakul pool oleva determinandi jaoks definitsiooni:

$$\sum_{\mathbb{P}_n}(-1)^{\mathsf{inv}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots(b_{i\alpha_i}+c_{i\alpha_i})\ldots a_{n\alpha_n}=$$

$$=\sum_{\mathbb{P}_n}(-1)^{\mathsf{inv}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots b_{i\alpha_i}\ldots a_{n\alpha_n}+$$

$$+\sum_{\mathbb{P}_n}(-1)^{\mathsf{inv}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)}a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots c_{i\alpha_i}\ldots a_{n\alpha_n}.$$

Avame sulud ja võtame eraldi kokku liidetavad, mille $i-$nda rea elemendid sisaldavad vastavalt tegurit $b_{i\alpha_i}$ ning $c_{i\alpha_i}$. Need liidetavad on definitsioonid võrduse paremal pool olevatele determinantidele.

# Determinandi omadused

**Om 4.** Determinant, mille kaks rida (veergu) koosnevad võrdsetest elementidest, on võrdne nulliga.

## Determinandi omadused

**Om 4.** Determinant, mille kaks rida (veergu) koosnevad võrdsetest elementidest, on võrdne nulliga.
*Tõestus.* Oletame, et determinandi $i-$nda ja $j-$nda rea elemendid on võrdsed, so

$$a_{i1} = a_{j1}, a_{i2} = a_{j2}, \ldots, a_{in} = a_{jn}$$

## Determinandi omadused

**Om 4.** Determinant, mille kaks rida (veergu) koosnevad võrdsetest elementidest, on võrdne nulliga.
*Tõestus.* Oletame, et determinandi $i-$nda ja $j-$nda rea elemendid on võrdsed, so

$$a_{i1} = a_{j1}, a_{i2} = a_{j2}, \ldots, a_{in} = a_{jn}$$

ning tuleb tõestada, et kehtib võrdus:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

## Om 4. Tõestus

Kirjutame determinandi definitsiooni põhjal välja kaks liidetavat

$$(-1)^{\sigma} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{i\alpha_i} \dots a_{j\alpha_j} \dots a_{n\alpha_n},$$

$$(-1)^{\tau} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{i\alpha_j} \dots a_{j\alpha_i} \dots a_{n\alpha_n},$$

kus $i < j$ ning $\sigma$ ja $\tau$ on inversioonide arvud veeruindeksitest moodustatud permutatsioonides

$$\sigma = \mathrm{inv}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i \dots \alpha_j \dots, \alpha_n),$$

$$\tau = \mathrm{inv}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j \dots \alpha_i \dots, \alpha_n).$$

Need veeruindeksite järgi moodustatud permutatsioonid erinevad ühe transpositsiooni võrra, järelikult neist üks on paaris ja teine paaritu permutatsioon, seega

$$(-1)^{\sigma} = -(-1)^{\tau}.$$

## Om 4. Tõestus

Asjaolust, et $i-$nda ja $j-$nda rea elemendid on võrdsed, järeldub, et

$$a_{i\,\alpha_i} = a_{j\,\alpha_i}, \quad a_{i\,\alpha_j} = a_{j\,\alpha_j},$$

mistõttu vaadeldavad liikmed erinevad vaid märgi poolest ning liitmisel koonduvad. Seega, determinandi kõik liidetavad koonduvad paarikaupa ja tõestatav võrdus kehtib, so

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

## Determinandi omadused

**Om 5.** Determinandi kahe rea (veeru) elementide ümbertõstmisel, muutub determinandi märk vastupidiseks.

Tuleb tõestada, et kehtib võrdus

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

## Om 5. Tõestus

Moodustame abideterminandi, mille kaks rida on võrdsed

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+a_{j1} & a_{i2}+a_{j2} & \dots & a_{in}+a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1}+a_{i1} & a_{j2}+a_{i2} & \dots & a_{jn}+a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

# Om 5. Tõestus

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1}+a_{i1} & a_{j2}+a_{i2} & \dots & a_{jn}+a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1}+a_{i1} & a_{j2}+a_{i2} & \dots & a_{jn}+a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

## Om 5. Tõestus

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +
$$

$$
+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.
$$

# Determinandi omadused

**Om 6.** Determinant, mille kahe rea (veergu) vastavad elemendid on võrdelised, on võrdne nulliga.

## Determinandi omadused

**Om 6.** Determinant, mille kahe rea (veergu) vastavad elemendid on võrdelised, on võrdne nulliga.

**Om 7.** Determinandi väärtus ei muutu, kui selle mingile reale (veerule) juurde liita mingi arvu kordne mingi rida (veerg).

## Determinandi omadused

**Om 6.** Determinant, mille kahe rea (veergu) vastavad elemendid on võrdelised, on võrdne nulliga.

**Om 7.** Determinandi väärtus ei muutu, kui selle mingile reale (veerule) juurde liita mingi arvu kordne mingi rida (veerg).

*Tõestus.* Liidame determinandi $j-$ndale reale $\lambda$ kordse $i-$nda rea elemendid:

## Om 7. Tõestus

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} + \lambda a_{i1} & a_{j2} + \lambda a_{i2} & \dots & a_{jn} + \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

# Determinandi omadused

**Om 8.** Determinant, mille kõik elemendid ühel pool peadiagonaali on võrdsed nulliga, on võrdne peadiagonaali elementide korrutisega, so

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Determinantide arvutamiseks kasutatakse omadusi 1 - 8.