Maatriksid

Maatriksi mõisete, tehted maatriksitega

Mati Väljas

mati.valjas@ttu.ee

Tallinna Tehnikaülikool

Maatriksi mõiste

Olgu S mingite matemaatiliste objektide hulk.

Maatriksi mõiste

Olgu S mingite matemaatiliste objektide hulk.
Def. Hulga S elementidest moodustatud ristküliku kujulist tabelit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nimetatakse $m \times n$ mõõtmeliseks ***maatriksiks***.

Maatriksi mõiste

Olgu S mingite matemaatiliste objektide hulk.
Def. Hulga S elementidest moodustatud ristküliku kujulist tabelit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nimetatakse $m \times n$ mõõtmeliseks ***maatriksiks***.

Maatriksit tähistatakse lühemalt

$$A = \left(a_{ik}\right), \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Maatriksi mõiste

Olgu S mingite matemaatiliste objektide hulk.
Def. Hulga S elementidest moodustatud ristküliku kujulist tabelit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nimetatakse $m \times n$ mõõtmeliseks ***maatriksiks***.

Maatriksit tähistatakse lühemalt

$$A = \big(a_{ik}\big), \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Indekseid i ja k nimetatakse vastavalt maatriksi rea- ja veeruindeksiteks. Rea- ja veeruindeksite paar (i, k) määrab maatriksis A üheselt ära elemendi a_{ik} asukoha.

Maatriksi mõiste

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Reaindeksi i fikseerimisel tekkivat elementide süsteemi

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ik}, \dots, a_{in})$$

nimetatakse maatriksi $i-$***ndaks reaks*** ehk ***reavektoriks***.

Maatriksi mõiste

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Reaindeksi i fikseerimisel tekkivat elementide süsteemi

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ik}, \dots, a_{in})$$

nimetatakse maatriksi $i-$***ndaks reaks*** ehk ***reavektoriks***.
Veeruindeksi k fikseerimisel tekkivat elementide süsteemi

$$(a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{ik}, \dots, a_{mk})$$

nimetatakse maatriksi $k-$***ndaks veeruks*** ehk ***veeruvektoriks***.

Maatriksi mõiste

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Reaindeksi i fikseerimisel tekkivat elementide süsteemi

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ik}, \dots, a_{in})$$

nimetatakse maatriksi $i-$***ndaks reaks*** ehk ***reavektoriks***.
Veeruindeksi k fikseerimisel tekkivat elementide süsteemi

$$(a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{ik}, \dots, a_{mk})$$

nimetatakse maatriksi $k-$***ndaks veeruks*** ehk ***veeruvektoriks***.
Maatriksi ridu ja veerege võime vaadelda vastavalt $1 \times n$ ja $m \times 1$ mõõtmeliste maatriksitena.

Ruutmaatriks

Maatriksit, mille ridade ja veergude arv on võrdne ($m = n$), nimetatakse ***ruutmaatriksiks***, so

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ruutmaatriks

Maatriksit, mille ridade ja veergude arv on võrdne ($m = n$), nimetatakse ***ruutmaatriksiks***, so

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ruutmaatriksi ridade ja veerude arvu n nimetatakse ***maatriksi järguks***.

Ruutmaatriks

Maatriksit, mille ridade ja veergude arv on võrdne ($m = n$), nimetatakse ***ruutmaatriksiks***, so

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ruutmaatriksi ridade ja veerude arvu n nimetatakse ***maatriksi järguks***.

Edaspidi vaatleme maatrikseid, mille elementideks on reaalarvud, st hulk $S = \mathbb{R}$.

Ruutmaatriks

Maatriksit, mille ridade ja veergude arv on võrdne ($m = n$), nimetatakse ***ruutmaatriksiks***, so

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ruutmaatriksi ridade ja veerude arvu n nimetatakse ***maatriksi järguks***.

Edaspidi vaatleme maatrikseid, mille elementideks on reaalarvud, st hulk $S = \mathbb{R}$.

Tähistame reaalarvuliste elementidega $m \times n$ mõõtmeliste maatriksite hulka $\mathbb{M}_{m \times n}$.

Diagonaal- ja skalaarmaatriks

Ruutmaatriksit $A \in \mathbb{M}_{n\times n}$, mille elemendid $a_{ik} = 0$ ($i \neq k$), nimetatakse ***diagonaalmaatriksiks***, so

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Diagonaal- ja skalaarmaatriks

Ruutmaatriksit $A \in \mathbb{M}_{n\times n}$, mille elemendid $a_{ik} = 0$ ($i \neq k$), nimetatakse ***diagonaalmaatriksiks***, so

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Diagonaalmaatriksit, mille peadiagonaali elemendid on võrdsed, nimetatakse ***skalaarmaatriks***, so

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}.$$

Ühikmaatriks

Skalaarmaatriksit E, mille peadiagonaali elemendid on võrdsed ühega, nimetatakse ***ühikmaatriksiks***, so

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ühikmaatriks

Skalaarmaatriksit E, mille peadiagonaali elemendid on võrdsed ühega, nimetatakse ***ühikmaatriksiks***, so

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Kroneckeri sümbol ehk ***Kroneckeri delta***

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{kui} \quad i = k, \\ 0, & \text{kui} \quad i \neq k. \end{cases}$$

Ühikmaatriks

Skalaarmaatriksit E, mille peadiagonaali elemendid on võrdsed ühega, nimetatakse ***ühikmaatriksiks***, so

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Kroneckeri sümbol ehk ***Kroneckeri delta***

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{kui} \quad i = k, \\ 0, & \text{kui} \quad i \neq k. \end{cases}$$

Seega ühikmaatriks

$$E = (\delta_{ik}).$$

Kolmnurkmaatriksid

Ruutmaatriksit, mille kõik elemendid, mis paiknevad peadiagonaalist ühel pool, on võrdsed nulliga, nimetatakse ***kolmnurkmaatriks***.

Kolmnurkmaatriksid

Ruutmaatriksit, mille kõik elemendid, mis paiknevad peadiagonaalist ühel pool, on võrdsed nulliga, nimetatakse ***kolmnurkmaatriks***.

Kolmnurkmaatriksit A, mille elemendid rahuldavad tingimust $a_{ik} = 0 \ \ (k < i)$, nimetatakse ***ülemiseks kolmnurkmaatriksiks***, so

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Kolmnurkmaatriksid

Kolmnurkmaatriksit A, mille elemendid $a_{ik} = 0 \;\; (k > i)$, nimetatakse ***alumiseks kolmnurkmaatriksiks***, so

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Kolmnurkmaatriksid

Kolmnurkmaatriksit A, mille elemendid $a_{ik} = 0 \ \ (k > i)$, nimetatakse ***alumiseks kolmnurkmaatriksiks***, so

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Kolmnurkmaatrikseid võib vaadeleda ka maatriksi A kõrvaldiagaonaali suhtes.

Kolmnurkmaatriksid

Kolmnurkmaatriksit A, mille elemendid $a_{ik} = 0 \ \ (k > i)$, nimetatakse ***alumiseks kolmnurkmaatriksiks***, so

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Kolmnurkmaatrikseid võib vaadeleda ka maatriksi A kõrvaldiagaonaali suhtes.

Juhul, kui maatriksi diagaonaal on täpsustamata, siis vaadeldakse kolmnurkmaatrikseid peadiagonaali suhtes.

Transponeeritud maatriks

Maatrikst A^T, mis saadakse maatriksisist $A = (a_{ik})$ ridade ja veergude vahetamisel, nimetatakse maatriksi A ***transponeeritud maatriksiks***. Seega, kui

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

siis tema transponeeritud maatriks on

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Transponeeritud maatriks

Kui A on $m \times n$ mõõtmeline maatriks, siis A^T on $n \times m$ mõõtmeline maatriks.

Transponeeritud maatriks

Kui A on $m \times n$ mõõtmeline maatriks, siis A^T on $n \times m$ mõõtmeline maatriks.

Järelikult

$$(A^T)^T = A.$$

Lineaartehted maatriksitega

Olgu $A = (a_{ik})$ ja $B = (b_{ik})$ kaks maatriksit hulgast $\mathbb{M}_{m \times n}$.

Lineaartehted maatriksitega

Olgu $A = (a_{ik})$ ja $B = (b_{ik})$ kaks maatriksit hulgast $\mathbb{M}_{m \times n}$.

Def. Maatriksite A ja B summaks nimetatakse maatriksit

$$A + B = (c_{ik}), \quad \text{kus} \quad c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}.$$

Lineaartehted maatriksitega

Olgu $A = (a_{ik})$ ja $B = (b_{ik})$ kaks maatriksit hulgast $\mathbb{M}_{m\times n}$.

Def. Maatriksite A ja B summaks nimetatakse maatriksit

$$A + B = (c_{ik}), \quad \text{kus} \quad c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}.$$

Def. Maatriksi $A = (a_{ik})$ korrutiseks reaalarvuga α nimetatakse maatriksit

$$\alpha A = (\alpha a_{ik}).$$

Lineaartehted maatriksitega

Olgu $A = (a_{ik})$ ja $B = (b_{ik})$ kaks maatriksit hulgast $\mathbb{M}_{m\times n}$.

Def. Maatriksite A ja B summaks nimetatakse maatriksit

$$A + B = (c_{ik}), \quad \text{kus} \quad c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}.$$

Def. Maatriksi $A = (a_{ik})$ korrutiseks reaalarvuga α nimetatakse maatriksit

$$\alpha A = (\alpha a_{ik}).$$

Lause. Maatriksite hulk $\mathbb{M}_{m\times n}$ on maatrikiste liitmise ja korrutamise suhtes vektorruum üle reaalarvude hulga $\mathbb{R}$.

Lineaartehted maatriksitega

Olgu $A = (a_{ik})$ ja $B = (b_{ik})$ kaks maatriksit hulgast $\mathbb{M}_{m\times n}$.

Def. Maatriksite A ja B summaks nimetatakse maatriksit

$$A + B = (c_{ik}), \quad \text{kus} \quad c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}.$$

Def. Maatriksi $A = (a_{ik})$ korrutiseks reaalarvuga α nimetatakse maatriksit

$$\alpha A = (\alpha a_{ik}).$$

Lause. Maatriksite hulk $\mathbb{M}_{m\times n}$ on maatrikiste liitmise ja korrutamise suhtes vektorruum üle reaalarvude hulga $\mathbb{R}$.

Tõestus. Kontrollida, et maatriksite liitmise ja reaalarvuga korrutamise korral on vektorruumi aksioomid 1) - 8) täidetud. $\square$

Maatriksite korrutamine

Olgu $A \in \mathbb{M}_{m \times p}$ ja $B \in \mathbb{M}_{p \times n}$.

Maatriksite korrutamine

Olgu $A \in \mathbb{M}_{m\times p}$ ja $B \in \mathbb{M}_{p\times n}$.

Def. Maatriksite A ja B korrutiseks nimetatakse maatriksit

$$AB = (c_{ik}), \quad \text{kus} \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk}.$$

Maatriksite korrutamine

Olgu $A \in \mathbb{M}_{m\times p}$ ja $B \in \mathbb{M}_{p\times n}$.

Def. Maatriksite A ja B korrutiseks nimetatakse maatriksit

$$AB = (c_{ik}), \quad \text{kus} \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk}.$$

Siit selgub, et kui maatriksite korrutis AB eksisteerib, siis juhul kui $m \neq n$ korrutist BA ei eksisteeri.

Maatriksite korrutamine

Olgu $A \in \mathbb{M}_{m\times p}$ ja $B \in \mathbb{M}_{p\times n}$.

Def. Maatriksite A ja B korrutiseks nimetatakse maatriksit

$$AB = (c_{ik}), \quad \text{kus} \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{jk}.$$

Siit selgub, et kui maatriksite korrutis AB eksisteerib, siis juhul kui $m \neq n$ korrutist BA ei eksisteeri.
Kui $m = n$, siis maatriksid AB ja BA eksisteerivad, kuid need on vastavalt $\mathbb{M}_{n\times n}$ ja $\mathbb{M}_{p\times p}$ maatriksite hulga elemendid.

Maatriksite korrutamine

Olgu $A \in \mathbb{M}_{m\times p}$ ja $B \in \mathbb{M}_{p\times n}$.

Def. Maatriksite A ja B korrutiseks nimetatakse maatriksit

$$AB = (c_{ik}), \quad \text{kus} \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{jk}.$$

Siit selgub, et kui maatriksite korrutis AB eksisteerib, siis juhul kui $m \neq n$ korrutist BA ei eksisteeri.
Kui $m = n$, siis maatriksid AB ja BA eksisteerivad, kuid need on vastavalt $\mathbb{M}_{n\times n}$ ja $\mathbb{M}_{p\times p}$ maatriksite hulga elemendid.

Öeldust järeldub, et ***maatriksite korrutamine ei ole kommutatiivne***, st tulemus sõltub tegurite järjekorrast.

Maatriksite korrutamine

Olgu $A \in \mathbb{M}_{m\times p}$ ja $B \in \mathbb{M}_{p\times n}$.

Def. Maatriksite A ja B korrutiseks nimetatakse maatriksit

$$AB = (c_{ik}), \quad \text{kus} \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{jk}.$$

Siit selgub, et kui maatriksite korrutis AB eksisteerib, siis juhul kui $m \neq n$ korrutist BA ei eksisteeri.
Kui $m = n$, siis maatriksid AB ja BA eksisteerivad, kuid need on vastavalt $\mathbb{M}_{n\times n}$ ja $\mathbb{M}_{p\times p}$ maatriksite hulga elemendid.

Öeldust järeldub, et ***maatriksite korrutamine ei ole kommutatiivne***, st tulemus sõltub tegurite järjekorrast.
Maatriksite korrutamine ei ole kommutatiive isegi siis, kui AB ja BA on samamõõtmelised maatriksid $(m = p = n)$.

Maatriksite korrutamise assotsiatiivsus

Olgu $A \in \mathbb{M}_{m\times p}$, $B \in \mathbb{M}_{p\times q}$ ja $C \in \mathbb{M}_{q\times m}$. Siis eksitsteerivad korrutised AB ja BC, kusjuures

$$(AB)C = A(BC),$$

st maatriksite korrutamine on assotsiatiivne.

Maatriksite korrutamise assotsiatiivsus

Olgu $A \in \mathbb{M}_{m\times p}$, $B \in \mathbb{M}_{p\times q}$ ja $C \in \mathbb{M}_{q\times m}$. Siis eksitsteerivad korrutised AB ja BC, kusjuures

$$(AB)C = A(BC),$$

st maatriksite korrutamine on assotsiatiivne.

$$(AB) = (\sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{jl}) = (f_{il})$$

$$(AB)C = (\sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{jl})C = (\sum_{l=1}^{q} f_{il}c_{lm}) = (\sum_{l=1}^{q}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{jl}c_{lm})$$

Maatriksite korrutamise assotsiatiivsus

$$(BC) = (\sum_{l=1}^{q} b_{jl}c_{lm}) = (g_{jm})$$

$$A(BC) = A(\sum_{l=1}^{q} b_{jl}c_{lm}) = (\sum_{j=1}^{p} a_{ij}g_{jm}) = (\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} a_{ij}b_{jl}c_{lm})$$

Maatriksite korrutamise assotsiatiivsus

$$(BC) = (\sum_{l=1}^{q} b_{jl} c_{lm}) = (g_{jm})$$

$$A(BC) = A(\sum_{l=1}^{q} b_{jl} c_{lm}) = (\sum_{j=1}^{p} a_{ij} g_{jm}) = (\sum_{j=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} a_{ij} b_{jl} c_{lm})$$

Võrdleme eelnevalt arvutatud korrutisega

$$(AB)C = (\sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jl})C = (\sum_{l=1}^{q} f_{il} c_{lm}) = (\sum_{l=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jl} c_{lm})$$

Maatriksite korrutamise assotsiatiivsus

$$(BC) = (\sum_{l=1}^{q} b_{jl}c_{lm}) = (g_{jm})$$

$$A(BC) = A(\sum_{l=1}^{q} b_{jl}c_{lm}) = (\sum_{j=1}^{p} a_{ij}g_{jm}) = (\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} a_{ij}b_{jl}c_{lm})$$

Võrdleme eelnevalt arvutatud korrutisega

$$(AB)C = (\sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{jl})C = (\sum_{l=1}^{q} f_{il}c_{lm}) = (\sum_{l=1}^{q}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{jl}c_{lm})$$

Järelikult maatriksite korrutamine on assotsiatiivne.

Maatriksite korrutamise assotsiatiivsus

$$(BC) = (\sum_{l=1}^{q} b_{jl} c_{lm}) = (g_{jm})$$

$$A(BC) = A(\sum_{l=1}^{q} b_{jl} c_{lm}) = (\sum_{j=1}^{p} a_{ij} g_{jm}) = (\sum_{j=1}^{p} \sum_{l=1}^{q} a_{ij} b_{jl} c_{lm})$$

Võrdleme eelnevalt arvutatud korrutisega

$$(AB)C = (\sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jl}) C = (\sum_{l=1}^{q} f_{il} c_{lm}) = (\sum_{l=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jl} c_{lm})$$

Järelikult maatriksite korrutamine on assotsiatiivne.
Maatriksite A ja B korrutamisel kehtib võrdus

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Näide

Arvutada maatriksite korrutis

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Näide

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0\cdot(-1)+0\cdot 2+1\cdot 1 & 0\cdot(-1)+0\cdot 2+1\cdot 1 \\ 1\cdot(-1)+1\cdot 2+2\cdot 1 & 1\cdot(-1)+1\cdot 2+2\cdot 1 \\ 2\cdot(-1)+2\cdot 2+3\cdot 1 & 2\cdot(-1)+2\cdot 2+3\cdot 1 \\ 3\cdot(-1)+3\cdot 2+4\cdot 1 & 3\cdot(-1)+3\cdot 2+4\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \\ 5 & 5 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Näide

Arvestades maatriksite korrutamise assotsiatiivsust leiame, et

$$ABC = (AB)C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \\ 5 & 5 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \\ 3 \cdot 4 + 3 \cdot 1 \\ 5 \cdot 4 + 5 \cdot 1 \\ 7 \cdot 4 + 7 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 25 \\ 35 \end{pmatrix}.$$