Vektorruum

Vektorruumi baas ja mõõde

Mati Väljas

mati.valjas@ttu.ee

Tallinna Tehnikaülikool

Vektorruumi baas

Vektorite süsteemi lineaarne sõltuvus ja sõltumatus leiavad järgnevas väga olulise rakenduse.

Vektorruumi baas

Vektorite süsteemi lineaarne sõltuvus ja sõltumatus leiavad järgnevas väga olulise rakenduse.

Def. Öeldakse, et vektorruumi $\mathbb{V}$ lineaarselt sõltumatute vektorite süsteem $\mathfrak{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ moodustab ***baasi***, kui ruumi $\mathbb{V}$ mistahes vektor on avaldatav süsteemi kuuluvate vektorite lineaarse kombinatsioonina, s.t

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{V} \quad \text{korral} \quad \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n,$$

kus $x_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Vektorruumi baas

Vektorite süsteemi lineaarne sõltuvus ja sõltumatus leiavad järgnevas väga olulise rakenduse.

Def. Öeldakse, et vektorruumi $\mathbb{V}$ lineaarselt sõltumatute vektorite süsteem $\mathfrak{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ moodustab ***baasi***, kui ruumi $\mathbb{V}$ mistahes vektor on avaldatav süsteemi kuuluvate vektorite lineaarse kombinatsioonina, s.t

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{V} \quad \text{korral} \quad \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n,$$

kus $x_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Vektorruumi, milles leidub lõplikust arvust vektoritest koosnev baas $\mathfrak{B}$, nimetatakse ***lõplikumõõtmeliseks***. Kui sellist baasi ei leidu, siis nimetatakse vektorruumi ***lõpmatumõõtmeliseks***.

Vektorruumi baas

Teoreem. *Lõplikumõõtmelise vektorruumi baasivektorite arv ei sõltu baasi valikust.*

Vektorruumi baas

Teoreem. *Lõplikumõõtmelise vektorruumi baasivektorite arv ei sõltu baasi valikust.*

Def. Vektorruumi $\mathbb{V}$ baasivektorite arvu nimetatakse vektorruumi ***mõõtmeks*** ehk ***dimensiooniks***.

Vektorruumi baas

Teoreem. *Lõplikumõõtmelise vektorruumi baasivektorite arv ei sõltu baasi valikust.*

Def. Vektorruumi $\mathbb{V}$ baasivektorite arvu nimetatakse vektorruumi ***mõõtmeks*** ehk ***dimensiooniks***.

Vektorruumi C, milles eksisteerib n vektorist koosnev baas, nimetatakse n-mõõtmeliseks ja tähistatakse $\mathbb{V}_n$.

Vektorruumi baas

Teoreem. *Lõplikumõõtmelise vektorruumi baasivektorite arv ei sõltu baasi valikust.*

Def. Vektorruumi $\mathbb{V}$ baasivektorite arvu nimetatakse vektorruumi ***mõõtmeks*** ehk ***dimensiooniks***.

Vektorruumi C, milles eksisteerib n vektorist koosnev baas, nimetatakse n-mõõtmeliseks ja tähistatakse $\mathbb{V}_n$.

Lineaarkombinatsiooni

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$$

kordajaid $x_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ nimetatakse vektori $\vec{x}$ ***koordinaatideks*** antud baasi suhtes.

Vektorruumi baas

Lause. Vektorruumi $\mathbb{V}_n$ mistahes n-lineaarselt sõltumatute vektorite süsteem moodustab baasi.

Vektorruumi baas

Lause. Vektorruumi $\mathbb{V}_n$ mistahes n-lineaarselt sõltumatute vektorite süsteem moodustab baasi.

Lause. Vektori koordinaadid fikseeritud baasi suhtes on määratud üheselt.

Vektorruumi baas

Lause. Vektorruumi $\mathbb{V}_n$ mistahes n-lineaarselt sõltumatute vektorite süsteem moodustab baasi.

Lause. Vektori koordinaadid fikseeritud baasi suhtes on määratud üheselt.

Tõestus. Olgu ruumis $\mathbb{V}_n$ fikseeritud baas $\mathfrak{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$. Oletame väite vastaselt, et

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n,$$

$$\vec{x} = x_1'\vec{e}_1 + x_2'\vec{e}_2 + \ldots + x_n'\vec{e}_n.$$

Kasutades vektorruumi aksioome

$$\vec{\theta} = (x_1 - x_1')\vec{e}_1 + (x_2 - x_2')\vec{e}_2 + \ldots + (x_n - x_n')\vec{e}_n.$$

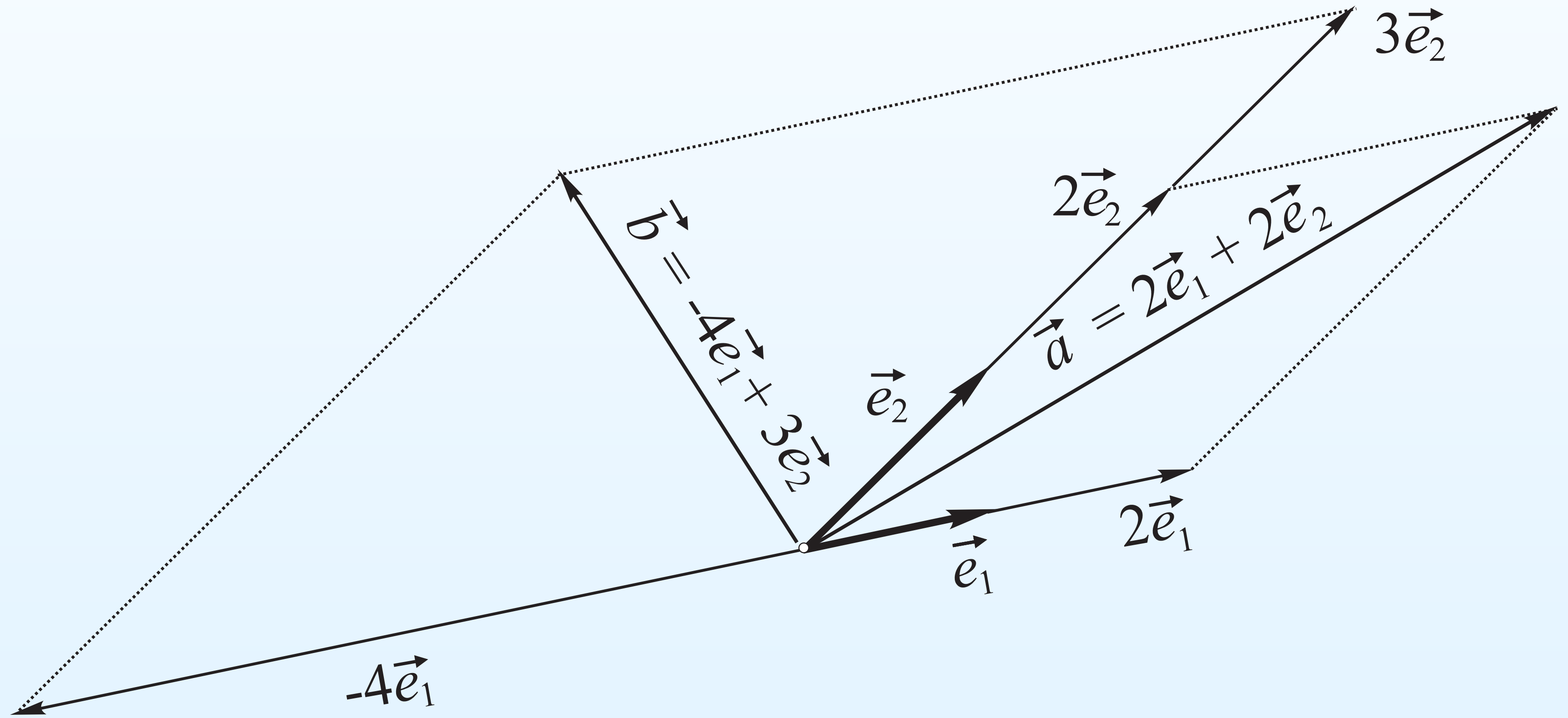
□

Vektorruumi baas

Märgime, et baasi moodustab just lineaarselt sõltumatute vektorite süsteem $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, mitte nende vektorite hulk. Teatavasti hulga elementide järjekord ei ole oluline, kuid baasivektorite ümberjärjestamisel saame uue baasi.

Baas vektorruumis $\mathbb{G}_2$

Tasandi geomeetriliste vektorite vektorruum $\mathbb{G}_2$ on kahemõõtmeline vektorruum, mille baasiks on mittekollineaarsed vektorid $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.



Baas vektorruumis $\mathbb{R}^n$

Lause. Aritmeetilises vektorruumis $\mathbb{R}^n$ moodustavad baasi vektorid:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= (1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0),\\
\vec{e}_2 &= (0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0),\\
\vec{e}_3 &= (0,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ 0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\vec{e}_n &= (0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 1).
\end{aligned}$$

Näitame, et need vektorid on lineaarselt sõltumatud. Tõestame selle väite vastaselt.

Baas vektorruumis $\mathbb{R}^n$

Oletame, et mingi kordajate

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

komplekti korral, mis kõik korraga ei ole nullid, osutub nendest vektoritest moodustatud lineaarkombinatsioon

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n = \vec{\theta}$$

nullvektoriks.

Baas vektorruumis $\mathbb{R}^n$

Oletame, et mingi kordajate

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

komplekti korral, mis kõik korraga ei ole nullid, osutub nendest vektoritest moodustatud lineaarkombinatsioon

$$\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n = \vec{\theta}$$

nullvektoriks.
Kasutades aritmeetilise vektorruumi tehteid, saame, et nullvektori $\vec{\theta}$ komponendid on

$$\vec{\theta} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n).$$

Baas vektorruumis $\mathbb{R}^n$

Oletame, et mingi kordajate

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

komplekti korral, mis kõik korraga ei ole nullid, osutub nendest vektoritest moodustatud lineaarkombinatsioon

$$\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n = \vec{\theta}$$

nullvektoriks.
Kasutades aritmeetilise vektorruumi tehteid, saame, et nullvektori $\vec{\theta}$ komponendid on

$$\vec{\theta} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n).$$

Tehtud eelduse tõttu kõik need komponendid ei ole nullid, mis on vastuolu, sest nullvektori kõik komponendid on nullid.

Baas vektorruumis $\mathbb{R}^n$

Kasutades aritmeetilise vektorruumi tehteid, saame ruumi $\mathbb{R}^n$ mistahes vektori $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ avaldada nende vektorite lineaarkombinatsioonina.

Baas vektorruumis $\mathbb{R}^n$

Kasutades aritmeetilise vektorruumi tehteid, saame ruumi $\mathbb{R}^n$ mistahes vektori $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ avaldada nende vektorite lineaarkombinatsioonina.

Tõepoolest

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_n) &= x_1\,(1,\ 0,\ \ldots\ ,\ 0)\ + \\ &+ x_2\,(0,\ 1,\ \ldots\ ,\ 0)\ + \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ x_n\,(\,0,\ 0,\ \ldots\ ,\ 1), \end{aligned}$$

Baas vektorruumis $\mathbb{R}^n$

Kasutades aritmeetilise vektorruumi tehteid, saame ruumi $\mathbb{R}^n$ mistahes vektori $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ avaldada nende vektorite lineaarkombinatsioonina.

Tõepoolest

$$\begin{array}{rcl} \vec{x}_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & x_1\,(1,\ 0,\ \ \ldots\ ,\ 0)\ + \\ & + & x_2\,(0,\ 1,\ \ \ldots\ ,\ 0)\ + \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + & x_n\,(\,0,\ 0,\ \ \ldots\ ,\ 1), \end{array}$$

millest

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i.$$

Baas vektorruumis $\mathbb{R}^n$

Baasi, mille moodustavad aritmeetilises ruumis $\mathbb{R}^n$ antud vektorid,

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= (1,\ 0,\ 0,\ \ldots\ ,\ 0),\\
\vec{e}_2 &= (0,\ 1,\ 0,\ \ldots\ ,\ 0),\\
\vec{e}_3 &= (0,\ 0,\ 1,\ \ldots\ ,\ 0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\vec{e}_n &= (0,\ 0,\ 0,\ \ldots\ ,\ 1),
\end{aligned}$$

nimetatakse ***kanooniliseks*** ehk ***loomulikuks baasiks*** ning mistahes vektori $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ komponendid on selle vektori ***koordinaadid*** kanoonilise baasi suhtes.

Lõpmatumõõtmelise vektorruumi näide

Üheks lihtsamaks lõpmatumõõtmelise vektorruumi näiteks on kõigi ühe muutuja polünoomide hulk $\mathbb{P}[x]$. Tõepoolest, olgu $f(x)$ ja $g(x)$ mistahes kaks elementi hulgast $\mathbb{P}[x]$, s.o

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n,$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{m-1} x^{m-1} + b_m x^m.$$

Lõpmatumõõtmelise vektorruumi näide

Üheks lihtsamaks lõpmatumõõtmelise vektorruumi näiteks on kõigi ühe muutuja polünoomide hulk $\mathbb{P}[x]$. Tõepoolest, olgu $f(x)$ ja $g(x)$ mistahes kaks elementi hulgast $\mathbb{P}[x]$, s.o

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n,$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{m-1} x^{m-1} + b_m x^m.$$

On arusaadav, et $f(x) + g(x) \in \mathbb{P}[x]$ ja $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ka $\alpha f(x) \in \mathbb{P}[x]$ ning vektrorruumi aksioomid 1)$-$8) on täidetud. Seega polünoomide hulk $\mathbb{P}[x]$ on vektorruum üle reaalarvude hulga $\mathbb{R}$.

Lõpmatumõõtmelise vektorruumi näide

Üheks lihtsamaks lõpmatumõõtmelise vektorruumi näiteks on kõigi ühe muutuja polünoomide hulk $\mathbb{P}[x]$. Tõepoolest, olgu $f(x)$ ja $g(x)$ mistahes kaks elementi hulgast $\mathbb{P}[x]$, s.o

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n,$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{m-1} x^{m-1} + b_m x^m.$$

On arusaadav, et $f(x) + g(x) \in \mathbb{P}[x]$ ja $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ka $\alpha f(x) \in \mathbb{P}[x]$ ning vektrorruumi aksioomid 1)$-$8) on täidetud. Seega polünoomide hulk $\mathbb{P}[x]$ on vektorruum üle reaalarvude hulga $\mathbb{R}$. Selles vektorruumis moodustavad baasi lineaarselt sõltumatud polünoomid

$$1 = x^0, x, x^2, \ldots, x^{n-1}, x^n, x^{n+1}, \ldots\ ,$$

sest nende polünoomide lineaarse kombinatsioonina on avaldatav selle vektorruumi iga polünoom.