Vektorruum

Vektorite lineaarne sõltuvus

Mati Väljas

mati.valjas@ttu.ee

Tallinna Tehnikaülikool

Lineaarkombinatsioon

Olgu $\mathbb{V}$ vektorruum üle reaalarvude hulga $\mathbb{R}$.

Lineaarkombinatsioon

Olgu $\mathbb{V}$ vektorruum üle reaalarvude hulga $\mathbb{R}$.
Valime k vektorit ja k reaalarvu

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k \in \mathbb{V} \quad \text{ning} \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}.$$

Lineaarkombinatsioon

Olgu $\mathbb{V}$ vektorruum üle reaalarvude hulga $\mathbb{R}$.
Valime k vektorit ja k reaalarvu

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k \in \mathbb{V} \quad \text{ning} \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}.$$

Kasutades vektorruumi lineaartehteid, saame neist moodustada uue vektori

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{a}_k \in \mathbb{V}.$$

Lineaarkombinatsioon

Olgu $\mathbb{V}$ vektorruum üle reaalarvude hulga $\mathbb{R}$.
Valime k vektorit ja k reaalarvu

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k \in \mathbb{V} \quad \text{ning} \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}.$$

Kasutades vektorruumi lineaartehteid, saame neist moodustada uue vektori

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{a}_k \in \mathbb{V}.$$

Seda vektorit nimetatakse vektorite $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ ***lineaarkombinatsiooniks***. Reaalarve $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ nimetatakse ***lineaarkombinatsiooni kordajateks***.

Triviaalne ja mittetrviaalne lineaarkombinatsioon

Def. Lineaarkombinatsiooni nimetatakse ***triviaalseks***, kui selle kõik kordajad on võrdsed nulliga, s.t

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0.$$

Triviaalne ja mittetrviaalne lineaarkombinatsioon

Def. Lineaarkombinatsiooni nimetatakse ***triviaalseks***, kui selle kõik kordajad on võrdsed nulliga, s.t

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0.$$

Lineaarkombinatsioon, mille kordajate seas leidub vähemalt üks nullist erinev, on ***mittetriviaalne***.

Triviaalne ja mittetrviiaalne lineaarkombinatsioon

Def. Lineaarkombinatsiooni nimetatakse ***triviaalseks***, kui selle kõik kordajad on võrdsed nulliga, s.t

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0.$$

Lineaarkombinatsioon, mille kordajate seas leidub vähemalt üks nullist erinev, on ***mittetriviaalne***.

Triviaalne lineaarkombinatsioon esitab alati nullvektori, sest

$$0\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2 + \ldots + 0\vec{a}_k = \vec{\theta}.$$

Lineaarne sõltuvus ja lineaarne sõltumatus

Def. Öeldakse, et vektorite süsteem $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ on ***lineaarselt sõltuv***, kui leidub nendest vektoritest moodustatud mitte-triviaalne lineaarkombinatsioon, mis on võrdne nullvektoriga.

Lineaarne sõltuvus ja lineaarne sõltumatus

Def. Öeldakse, et vektorite süsteem $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ on ***lineaarselt sõltuv***, kui leidub nendest vektoritest moodustatud mitte-triviaalne lineaarkombinatsioon, mis on võrdne nullvektoriga.

Def. Öeldakse, et vektorite süsteem $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ on ***lineaarselt sõltumatu***, kui nendest vektoritest moodustatud lineaarkombinatsioon on võrdne nullvektoriga ainult siis, kui see lineaarkombinatsioon on triviaalne.

Lineaarne sõltuvus ja lineaarne sõltumatus

Def. Öeldakse, et vektorite süsteem $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ on ***lineaarselt sõltuv***, kui leidub nendest vektoritest moodustatud mitte-triviaalne lineaarkombinatsioon, mis on võrdne nullvektoriga.

Def. Öeldakse, et vektorite süsteem $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ on ***lineaarselt sõltumatu***, kui nendest vektoritest moodustatud lineaarkombinatsioon on võrdne nullvektoriga ainult siis, kui see lineaarkombinatsioon on triviaalne.

Pange tähele asjaolu, et triviaalne lineaarkombinatsioon on alati võrdne nullvektoriga, kuid lineaarselt sõltumatute vektorite korral on see ***ainus*** lineaarkombinatsioon, mis on nullvektoriga võrdne.

Lineaarne sõltuvus ja lineaarne sõltumatus

Def. Öeldakse, et vektorite süsteem $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ on ***lineaarselt sõltuv***, kui leidub nendest vektoritest moodustatud mitte-triviaalne lineaarkombinatsioon, mis on võrdne nullvektoriga.

Def. Öeldakse, et vektorite süsteem $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ on ***lineaarselt sõltumatu***, kui nendest vektoritest moodustatud lineaarkombinatsioon on võrdne nullvektoriga ainult siis, kui see lineaarkombinatsioon on triviaalne.

Pange tähele asjaolu, et triviaalne lineaarkombinatsioon on alati võrdne nullvektoriga, kuid lineaarselt sõltumatute vektorite korral on see ***ainus*** lineaarkombinatsioon, mis on nullvektoriga võrdne.

Miks vektorite ***süsteem***, mitte ***hulk***?

Lineaarse sõltuvuse ja sõltumatuse omadusi

Lause. Vektorite süsteem, mis sisaldab mingit vektorit korduvalt, on lineaarselt sõltuv.

Tõestus. $\square$

Lineaarse sõltuvuse ja sõltumatuse omadusi

Lause. Vektorite süsteem, mis sisaldab mingit vektorit korduvalt, on lineaarselt sõltuv.

Tõestus. Olgu vektorite süsteemis $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ kaks võrdset vektorit. Näiteks $\vec{a}_p = \vec{a}_q$, kus $p < q \leqslant k$.

$\square$

Lineaarse sõltuvuse ja sõltumatuse omadusi

Lause. Vektorite süsteem, mis sisaldab mingit vektorit korduvalt, on lineaarselt sõltuv.

Tõestus. Olgu vektorite süsteemis $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ kaks võrdset vektorit. Näiteks $\vec{a}_p = \vec{a}_q$, kus $p < q \leqslant k$.

Mida tuleb teha vektorite süsteemi lineaarse sõltuvuse või sõltumatuse uurimiseks?

$\square$

Lineaarse sõltuvuse ja sõltumatuse omadusi

Lause. Vektorite süsteem, mis sisaldab mingit vektorit korduvalt, on lineaarselt sõltuv.

Tõestus. Olgu vektorite süsteemis $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ kaks võrdset vektorit. Näiteks $\vec{a}_p = \vec{a}_q$, kus $p < q \leqslant k$.

Mida tuleb teha vektorite süsteemi lineaarse sõltuvuse või sõltumatuse uurimiseks?

Moodustame lineaarkombinatsiooni

$$0\vec{a}_1+\ldots+0\vec{a}_{p-1}+1\vec{a}_p+0\vec{a}_{p+1}+\ldots+0\vec{a}_{q-1}-1\vec{a}_q+0\vec{a}_{q+1}+\ldots+0\vec{a}_k = \vec{\theta}.$$

$\square$

Lineaarse sõltuvuse ja sõltumatuse omadusi

Lause. Vektorite süsteem, mis sisaldab mingit vektorit korduvalt, on lineaarselt sõltuv.

Tõestus. Olgu vektorite süsteemis $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ kaks võrdset vektorit. Näiteks $\vec{a}_p = \vec{a}_q$, kus $p < q \leqslant k$.

Mida tuleb teha vektorite süsteemi lineaarse sõltuvuse või sõltumatuse uurimiseks?

Moodustame lineaarkombinatsiooni

$$0\vec{a}_1 + \ldots + 0\vec{a}_{p-1} + 1\vec{a}_p + 0\vec{a}_{p+1} + \ldots + 0\vec{a}_{q-1} - 1\vec{a}_q + 0\vec{a}_{q+1} + \ldots + 0\vec{a}_k = \vec{\theta}.$$

Selle kaks kordajat on nullist erinevad, st nullvektori saime mittetriviaalsel viisil. $\square$

Lineaarse sõltuvuse ja sõltumatuse omadusi

Lause. Ühest vektorist koosnev vektorite süsteem on lineaarselt sõltuv parajasti siis, kui see koosneb ainult nullvektorist, s.t $\vec{a} = \vec{\theta}$.

Lineaarse sõltuvuse ja sõltumatuse omadusi

Lause. Ühest vektorist koosnev vektorite süsteem on lineaarselt sõltuv parajasti siis, kui see koosneb ainult nullvektorist, s.t $\vec{a} = \vec{\theta}$.

Tõestus. *Tarvilikkus*. Eeldame, et $\vec{a} = \vec{\theta}$. Siis $\lambda \neq 0$, korral $\lambda\vec{a} = \lambda\vec{\theta} = \vec{\theta}$. Seega on mittetriviaalne lineaarkombinatsioon võrdne nullvektoriga ja vektorite süsteem on lineaarselt sõltuv.

□

Lineaarse sõltuvuse ja sõltumatuse omadusi

Lause. Ühest vektorist koosnev vektorite süsteem on lineaarselt sõltuv parajasti siis, kui see koosneb ainult nullvektorist, s.t $\vec{a} = \vec{\theta}$.

Tõestus. *Tarvilikkus*. Eeldame, et $\vec{a} = \vec{\theta}$. Siis $\lambda \neq 0$, korral $\lambda\vec{a} = \lambda\vec{\theta} = \vec{\theta}$. Seega on mittetriviaalne lineaarkombinatsioon võrdne nullvektoriga ja vektorite süsteem on lineaarselt sõltuv.

Piisavus. Eeldame, et vaadeldav vektorite süsteem on lineaarselt sõltuv, s.t $\lambda\vec{a} = \vec{\theta}$ ja $\lambda \neq 0$. Siis $1 = \frac{1}{\lambda}\lambda$, millest

$$\vec{a} = 1\vec{a} = (\frac{1}{\lambda}\lambda)\vec{a} = \frac{1}{\lambda}(\lambda\vec{a}) = \frac{1}{\lambda}\vec{\theta} = \vec{\theta}.$$

Seega on süsteemi kuuluv vektor $\vec{a}$ nullvektor. $\square$

Lineaarse sõltuvuse ja sõltumatuse omadusi

Lause. Lineaarselt sõltumatu vektorite süsteemi iga alamsüsteem on lineaarselt sõltumatu.

Lineaarse sõltuvuse ja sõltumatuse omadusi

Lause. Lineaarselt sõltumatu vektorite süsteemi iga alamsüsteem on lineaarselt sõltumatu.

Tõestus. Olgu vektorite süsteem $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ lineaarselt sõltumatu.

$\square$

Lineaarse sõltuvuse ja sõltumatuse omadusi

Lause. Lineaarselt sõltumatu vektorite süsteemi iga alamsüsteem on lineaarselt sõltumatu.

Tõestus. Olgu vektorite süsteem $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ lineaarselt sõltumatu. Oletame väite vastaselt, et selle alamsüsteem $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_p \quad (p < k)$ on lineaarselt sõltuv.

$\square$

Lineaarse sõltuvuse ja sõltumatuse omadusi

Lause. Lineaarselt sõltumatu vektorite süsteemi iga alamsüsteem on lineaarselt sõltumatu.

Tõestus. Olgu vektorite süsteem $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ lineaarselt sõltumatu.
Oletame väite vastaselt, et selle alamsüsteem $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_p \quad (p < k)$ on lineaarselt sõltuv.
Seega saab nendest vektoritest moodustada mittetriviaalse lineaarkombinatsiooni selliselt, et

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_p\vec{a}_p = \vec{\theta}.$$

□

Lineaarse sõltuvuse ja sõltumatuse omadusi

Lause. Lineaarselt sõltumatu vektorite süsteemi iga alamsüsteem on lineaarselt sõltumatu.

Tõestus. Olgu vektorite süsteem $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ lineaarselt sõltumatu. Oletame väite vastaselt, et selle alamsüsteem $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_p \quad (p < k)$ on lineaarselt sõltuv.
Seega saab nendest vektoritest moodustada mittetriviaalse lineaarkombinatsiooni selliselt, et

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_p\vec{a}_p = \vec{\theta}.$$

Liidame selle avaldise vasakule poolele nullvektori $\vec{\theta}$, siis vektorruumi kolmanda aksioomi põhjal

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_p\vec{a}_p + \underbrace{0\vec{a}_{p+1} + 0\vec{a}_{p+2} + \ldots + 0\vec{a}_k}_{\vec{\theta}} = \vec{\theta}.$$

□

Lineaarse sõltuvuse ja sõltumatuse omadusi

Lause. Vähemalt kahest vektorist koosnev vektorite süsteem on lineaarselt sõltuv parajasti siis, kui selles süsteemis leidub vektor, mis avaldub ülejäänud vektorite lineaarse kombinatsioonina.

Lineaarse sõltuvuse ja sõltumatuse omadusi

Lause. Vähemalt kahest vektorist koosnev vektorite süsteem on lineaarselt sõltuv parajasti siis, kui selles süsteemis leidub vektor, mis avaldub ülejäänud vektorite lineaarse kombinatsioonina.

Tõestus. *Tarvilikkus*. Oletame, et vektorite süsteemis $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ leidub vektor, mis avaldub ülejäänud vektorite lineaarse kombinatsioonina.

□

Lineaarse sõltuvuse ja sõltumatuse omadusi

Lause. Vähemalt kahest vektorist koosnev vektorite süsteem on lineaarselt sõltuv parajasti siis, kui selles süsteemis leidub vektor, mis avaldub ülejäänud vektorite lineaarse kombinatsioonina.

Tõestus. *Tarvilikkus*. Oletame, et vektorite süsteemis $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ leidub vektor, mis avaldub ülejäänud vektorite lineaarse kombinatsioonina.
Olgu selleks vektor $\vec{a_p} \quad (p \leq k)$, seega

$$\vec{a_p} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_{p-1} \vec{a}_{p-1} + \lambda_{p+1} \vec{a}_{p+1} + \ldots + \lambda_k \vec{a}_k.$$

$\square$

Lineaarse sõltuvuse ja sõltumatuse omadusi

Lause. Vähemalt kahest vektorist koosnev vektorite süsteem on lineaarselt sõltuv parajasti siis, kui selles süsteemis leidub vektor, mis avaldub ülejäänud vektorite lineaarse kombinatsioonina.

Tõestus. *Tarvilikkus*. Oletame, et vektorite süsteemis $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ leidub vektor, mis avaldub ülejäänud vektorite lineaarse kombinatsioonina.
Olgu selleks vektor $\vec{a_p} \quad (p \leq k)$, seega

$$\vec{a_p} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_{p-1}\vec{a}_{p-1} + \lambda_{p+1}\vec{a}_{p+1} + \ldots + \lambda_k\vec{a}_k.$$

Liidame viimase võrduse mõlemale poolele vektori $\vec{a_p}$ vastandvektori $-\vec{a_p} = (-1)\vec{a_p}$ ja kasutame vektorruumi aksioome, leiame

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_{p-1}\vec{a}_{p-1} + (-1)\vec{a_p} + \lambda_{p+1}\vec{a}_{p+1} + \ldots + \lambda_k\vec{a}_k = \vec{\theta}.$$

□

Lineaarse sõltuvuse ja sõltumatuse omadusi

Lause. Vähemalt kahest vektorist koosnev vektorite süsteem on lineaarselt sõltuv parajasti siis, kui selles süsteemis leidub vektor, mis avaldub ülejäänud vektorite lineaarse kombinatsioonina.

Tõestus. *Tarvilikkus*. Oletame, et vektorite süsteemis $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ leidub vektor, mis avaldub ülejäänud vektorite lineaarse kombinatsioonina.
Olgu selleks vektor $\vec{a_p} \quad (p \leq k)$, seega

$$\vec{a_p} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_{p-1} \vec{a}_{p-1} + \lambda_{p+1} \vec{a}_{p+1} + \ldots + \lambda_k \vec{a}_k.$$

Liidame viimase võrduse mõlemale poolele vektori $\vec{a_p}$ vastandvektori $-\vec{a_p} = (-1)\vec{a_p}$ ja kasutame vektorruumi aksioome, leiame

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_{p-1} \vec{a}_{p-1} + (-1)\vec{a_p} + \lambda_{p+1} \vec{a}_{p+1} + \ldots + \lambda_k \vec{a}_k = \vec{\theta}.$$

Siin $\lambda_p = -1 \neq 0$. Seega lineaarkombinatsioon on mittetriviaalne ja vaadeldav vektorite süsteem on lineaarselt sõltuv. □

Lineaarse sõltuvuse ja sõltumatuse omadusi

Piisavus. Oletame, et $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ moodustavad lineaarselt sõltuva süsteemi ja tõestame, et selles süsteemis leidub vektor, mis avaldub ülejäänute lineaarse kombinatsioonina.

Lineaarse sõltuvuse ja sõltumatuse omadusi

Piisavus. Oletame, et $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ moodustavad lineaarselt sõltuva süsteemi ja tõestame, et selles süsteemis leidub vektor, mis avaldub ülejäänute lineaarse kombinatsioonina.
Lineaarse sõltuvuse tõttu leidub lineaarkombinatsioonis

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_{p-1}\vec{a}_{p-1} + \lambda_p\vec{a_p} + \lambda_{p+1}\vec{a}_{p+1} + \ldots + \lambda_k\vec{a}_k = \vec{\theta}$$

vähemalt üks nullist erinev kordaja, olgu selleks $\lambda_p \neq 0$.

Lineaarse sõltuvuse ja sõltumatuse omadusi

Piisavus. Oletame, et $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ moodustavad lineaarselt sõltuva süsteemi ja tõestame, et selles süsteemis leidub vektor, mis avaldub ülejäänute lineaarse kombinatsioonina.
Lineaarse sõltuvuse tõttu leidub lineaarkombinatsioonis

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_{p-1}\vec{a}_{p-1} + \lambda_p\vec{a_p} + \lambda_{p+1}\vec{a}_{p+1} + \ldots + \lambda_k\vec{a}_k = \vec{\theta}$$

vähemalt üks nullist erinev kordaja, olgu selleks $\lambda_p \neq 0$.
Korrutame viimast lineaarkombinatsiooni reaalarvuga $-\dfrac{1}{\lambda_p}$ ja kasutame vektorruumi aksioome, saame

$$\vec{a_p} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_p}\vec{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_p}\vec{a}_2 - \ldots - \frac{\lambda_{p-1}}{\lambda_p}\vec{a}_{p-1} - \frac{\lambda_{p+1}}{\lambda_p}\vec{a}_{p+1} \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda_p}\vec{a_k}.$$

Lineaarse sõltuvuse ja sõltumatuse omadusi

Piisavus. Oletame, et $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ moodustavad lineaarselt sõltuva süsteemi ja tõestame, et selles süsteemis leidub vektor, mis avaldub ülejäänute lineaarse kombinatsioonina.
Lineaarse sõltuvuse tõttu leidub lineaarkombinatsioonis

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_{p-1}\vec{a}_{p-1} + \lambda_p\vec{a_p} + \lambda_{p+1}\vec{a}_{p+1} + \ldots + \lambda_k\vec{a}_k = \vec{\theta}$$

vähemalt üks nullist erinev kordaja, olgu selleks $\lambda_p \neq 0$.
Korrutame viimast lineaarkombinatsiooni reaalarvuga $-\dfrac{1}{\lambda_p}$ ja kasutame vektorruumi aksioome, saame

$$\vec{a_p} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_p}\vec{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_p}\vec{a}_2 - \ldots - \frac{\lambda_{p-1}}{\lambda_p}\vec{a}_{p-1} - \frac{\lambda_{p+1}}{\lambda_p}\vec{a}_{p+1} \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda_p}\vec{a_k}.$$

Järelikult vektor $\vec{a_p}$ avaldub ülejäänud vektorite lineaarse kombinatsioonina. $\square$

Lineaarse sõltuvuse ja sõltumatuse omadusi

Lause. Kui lineaarselt sõltumatute vektorite süsteemi $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ täiendamisel vektoriga $\vec{a}$ saame lineaarselt sõltuva vektorite süsteemi, siis vektor $\vec{a}$ avaldub vektorite $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ lineaarse kombinatsioonina, so

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_k \vec{a}_k.$$

Lineaarse sõltuvuse ja sõltumatuse omadusi

Lause. Kui lineaarselt sõltumatute vektorite süsteemi $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ täiendamisel vektoriga $\vec{a}$ saame lineaarselt sõltuva vektorite süsteemi, siis vektor $\vec{a}$ avaldub vektorite $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ lineaarse kombinatsioonina, so

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_k \vec{a}_k.$$

Def. Öeldakse, et vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on ***kollineaarsed***, kui leidub selline reaalarv λ, et $\vec{a} = \lambda \vec{b}$.

Lineaarse sõltuvuse ja sõltumatuse omadusi

Lause. Kui lineaarselt sõltumatute vektorite süsteemi $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ täiendamisel vektoriga $\vec{a}$ saame lineaarselt sõltuva vektorite süsteemi, siis vektor $\vec{a}$ avaldub vektorite $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ lineaarse kombinatsioonina, so

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_k \vec{a}_k.$$

Def. Öeldakse, et vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on ***kollineaarsed***, kui leidub selline reaalarv λ, et $\vec{a} = \lambda \vec{b}$.

Def. Öeldakse, et vektorid $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ on ***komplanaarsed***, kui leiduvad sellised reaalarvud λ ja μ, et $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$.