Vektorruum

Näiteid vektorruumidest

Mati Väljas

`mati.valjas@ttu.ee`

Tallinna Tehnikaülikool

Aritmeetiline ruum

Võtame $\mathbb{V}$= $\mathbb{R}^n$,kus

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n-tegurit} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \quad i = 1, 2, \ldots, n\}$$

on reaalarvude hulga $\mathbb{R}$ otseaste.

Aritmeetiline ruum

Võtame $\mathbb{V}$= $\mathbb{R}^n$,kus

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n-tegurit} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \quad i = 1, 2, \ldots, n\}$$

on reaalarvude hulga $\mathbb{R}$ otseaste.

Selle hulga elementideks on n-elemendilised reaalarvuliste komponentidega järjendid ehk lõplikud jadad, mida tähistatakse

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Aritmeetiline ruum

Selleks et hulk $\mathbb{R}^n$ osutuks vektorruumiks, on vaja defineerida järjendite liitmise ja skalaariga korrutamise tehted.

Aritmeetiline ruum

Selleks et hulk $\mathbb{R}^n$ osutuks vektorruumiks, on vaja defineerida järjendite liitmise ja skalaariga korrutamise tehted.

Järjendite $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ja $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ summaks loeme järjendit, mis leitakse vastavalt eeskirjale

$$\vec{a} + \vec{b} \overset{\text{def}}{=} (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n).$$

Aritmeetiline ruum

Selleks et hulk $\mathbb{R}^n$ osutuks vektorruumiks, on vaja defineerida järjendite liitmise ja skalaariga korrutamise tehted.

Järjendite $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ja $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ summaks loeme järjendit, mis leitakse vastavalt eeskirjale

$$\vec{a} + \vec{b} \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n).$$

Järjendi $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ja reaalarvu $\lambda \in \mathbb{R}$ korrutiseks loeme järjendit, mis leitakse vastavalt eeskirjale

$$\lambda\vec{a} \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n).$$

Aritmeetiline ruum

Selleks et hulk $\mathbb{R}^n$ osutuks vektorruumiks, on vaja defineerida järjendite liitmise ja skalaariga korrutamise tehted.

Järjendite $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ja $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ summaks loeme järjendit, mis leitakse vastavalt eeskirjale

$$\vec{a} + \vec{b} \overset{\text{def}}{=} (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n).$$

Järjendi $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ja reaalarvu $\lambda \in \mathbb{R}$ korrutiseks loeme järjendit, mis leitakse vastavalt eeskirjale

$$\lambda\vec{a} \overset{\text{def}}{=} (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n).$$

Järjendite liitmine ja skalaariga (reaalarvuga) korrutamine on üheselt määratud, sest nende tehete definitsioonides on kasutatud tehteid reaalarvudega.

Aritmeetiline ruum

Nüüd on vaja kontrollida, et nende tehete korral on täidetud kõik vektorruumi aksioomid 1) – 8). Kontrollime aksioomi 1) kehtivust. Iga $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ korral saame kirjutada, et

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) \overset{\text{(def)}}{=}$$

Aritmeetiline ruum

Nüüd on vaja kontrollida, et nende tehete korral on täidetud kõik vektorruumi aksioomid 1) – 8). Kontrollime aksioomi 1) kehtivust. Iga $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ korral saame kirjutada, et

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) \overset{\text{(def)}}{=}$$

$$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2, \ldots, b_n + a_n) \overset{\text{(def)}}{=}$$

Aritmeetiline ruum

Nüüd on vaja kontrollida, et nende tehete korral on täidetud kõik vektorruumi aksioomid 1) – 8). Kontrollime aksioomi 1) kehtivust. Iga $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ korral saame kirjutada, et

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) \overset{\text{(def)}}{=}$$

$$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2, \ldots, b_n + a_n) \overset{\text{(def)}}{=}$$

$$= (b_1, b_2, \ldots, b_n) + (a_1, a_2, \ldots, a_n) = \vec{b} + \vec{a}.$$

Aritmeetiline ruum

Nõutavaks nullelemendiks sobib järjend $\vec{\theta} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Aritmeetiline ruum

Nõutavaks nullelemendiks sobib järjend $\vec{\theta} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Elemendi $\vec{a}$ vastandelemendiks $-\vec{a} = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$.

Aritmeetiline ruum

Nõutavaks nullelemendiks sobib järjend $\vec{\theta} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Elemendi $\vec{a}$ vastandelemendiks $-\vec{a} = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$.

Analoogiliselt saame kontrollida, et nende tehete korral kehtivad ka kõik ülejäänud vektorruumi aksioomid.

Aritmeetiline ruum

Nõutavaks nullelemendiks sobib järjend $\vec{\theta} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Elemendi $\vec{a}$ vastandelemendiks $-\vec{a} = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$.

Analoogiliselt saame kontrollida, et nende tehete korral kehtivad ka kõik ülejäänud vektorruumi aksioomid.

Kokkuvõtteks:

Teoreem. Hulk $\mathbb{R}^n$ on vektorruum üle reaalarvude hulga $\mathbb{R}$.
Seda vektorruumi nimetatakse ***aritmeetiliseks ruumiks*** ja selle elemente ***aritmeetilisteks vektoriteks***.

Geomeetriliste vektorite vektorruum

Järgnevalt tutvume ühe vektorruumi näitega, millel on oluline roll geomeetrias, füüsikas ja tehnikateadustes. Nendes valdkondades nimetatakse vektoriteks suunatud sirglõike, millel on kindel pikkus ja suund. Üldjuhul nende lõikude vastastikune asend ei ole oluline.

Geomeetriliste vektorite vektorruum

Järgnevalt tutvume ühe vektorruumi näitega, millel on oluline roll geomeetrias, füüsikas ja tehnikateadustes. Nendes valdkondades nimetatakse vektoriteks suunatud sirglõike, millel on kindel pikkus ja suund. Üldjuhul nende lõikude vastastikune asend ei ole oluline.

Tugineme harjumuspärasele geomeetrilisele ettekujutusele ja loeme mõisted punkt, sirge, tasand ning ruum algmõisteteks, s.o mõisteteks, mida ei saa defineerida neist üldisemate mõistete kaudu.

Geomeetriliste vektorite vektorruum

Järgnevalt tutvume ühe vektorruumi näitega, millel on oluline roll geomeetrias, füüsikas ja tehnikateadustes. Nendes valdkondades nimetatakse vektoriteks suunatud sirglõike, millel on kindel pikkus ja suund. Üldjuhul nende lõikude vastastikune asend ei ole oluline.

Tugineme harjumuspärasele geomeetrilisele ettekujutusele ja loeme mõisted punkt, sirge, tasand ning ruum algmõisteteks, s.o mõisteteks, mida ei saa defineerida neist üldisemate mõistete kaudu.

Vaatleme fikseeritud sirgel, tasandil või ruumis sirglõike, mille suuna määrab lõigu otspunktide järjestus. Niisuguseid lõike nimetatakse suunatud sirglõikudeks.

Geomeetriline vektor

Def. Suunatud sirglõiku, mille algus- ehk rakenduspunkt on fikseeritud, nimetatakse ***seotud vektoriks***.

Geomeetriline vektor

Def. Suunatud sirglõiku, mille algus- ehk rakenduspunkt on fikseeritud, nimetatakse ***seotud vektoriks***.

Edaspidi loeme samaväärseteks ühepikkusi ja samasuunalisi sirglõike. See on ekvivalentsiseos suunatud sirglõikude hulgal ja tekitab sellel klassijaotuse.

Geomeetriline vektor

Def. Suunatud sirglõiku, mille algus- ehk rakenduspunkt on fikseeritud, nimetatakse ***seotud vektoriks***.

Edaspidi loeme samaväärseteks ühepikkusi ja samasuunalisi sirglõike. See on ekvivalentsiseos suunatud sirglõikude hulgal ja tekitab sellel klassijaotuse.

Def. Suunatud sirglõikude hulga ühepikkuste ja sama suunaga sirglõikude ekvivalentsiklassi nimetakse ***geomeetriliseks vektoriks***. Geomeetriliste vektorite hulka tähistatakse $\mathbb{G}$.

Geomeetriline vektor

Def. Suunatud sirglõiku, mille algus- ehk rakenduspunkt on fikseeritud, nimetatakse ***seotud vektoriks***.

Edaspidi loeme samaväärseteks ühepikkusi ja samasuunalisi sirglõike. See on ekvivalentsiseos suunatud sirglõikude hulgal ja tekitab sellel klassijaotuse.

Def. Suunatud sirglõikude hulga ühepikkuste ja sama suunaga sirglõikude ekvivalentsiklassi nimetakse ***geomeetriliseks vektoriks***. Geomeetriliste vektorite hulka tähistatakse $\mathbb{G}$.

Teisiti öeldes, kõik samasuunalised ja ühepikkused lõigud esindavad üht ja sama geomeetrilist vektorit. Sirgel, tasandil ja ruumis olevate geomeetriliste vektorite hulki tähistatakse vastavalt $\mathbb{G}_1$, $\mathbb{G}_2$, $\mathbb{G}_3$.

Geomeetriliste vektorite vektorruum

Selleks et geomeetriliste vektorite hulk $\mathbb{G}$ osutuks vektorruumiks,

Geomeetriliste vektorite vektorruum

Selleks et geomeetriliste vektorite hulk $\mathbb{G}$ osutuks vektorruumiks, on vaja defineerida selle hulga elementide liitmise ja skalaariga (ehk arvuga) korrutamise tehted.

Geomeetriliste vektorite vektorruum

Selleks et geomeetriliste vektorite hulk $\mathbb{G}$ osutuks vektorruumiks, on vaja defineerida selle hulga elementide liitmise ja skalaariga (ehk arvuga) korrutamise tehted.

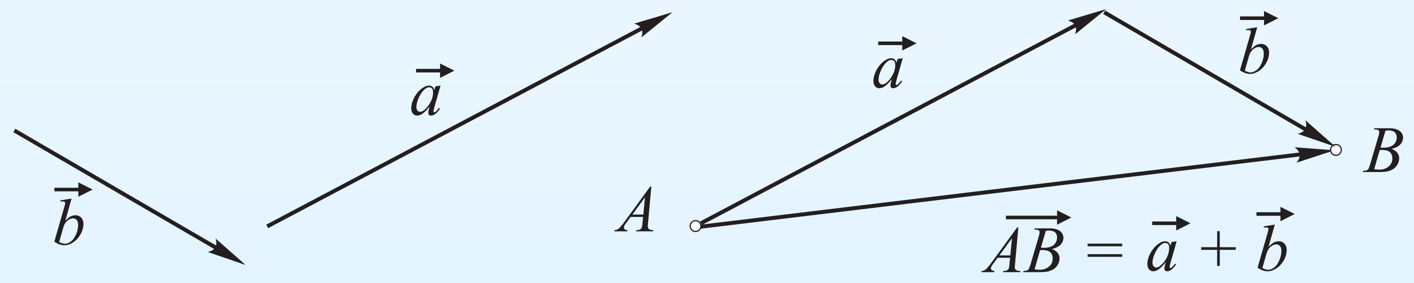
Def. Geomeetriliste vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ***summaks*** nimetatakse vektorit, mille alguspunktiks on vektori $\vec{a}$ alguspunkt ja lõpp-punktiks vektori $\vec{b}$ lõpp-punkt tingimusel, et vektor $\vec{b}$ on rakendatud vektori $\vec{a}$ lõpp-punktist.

Geomeetriliste vektorite vektorruum

Selleks et geomeetriliste vektorite hulk $\mathbb{G}$ osutuks vektorruumiks, on vaja defineerida selle hulga elementide liitmise ja skalaariga (ehk arvuga) korrutamise tehted.

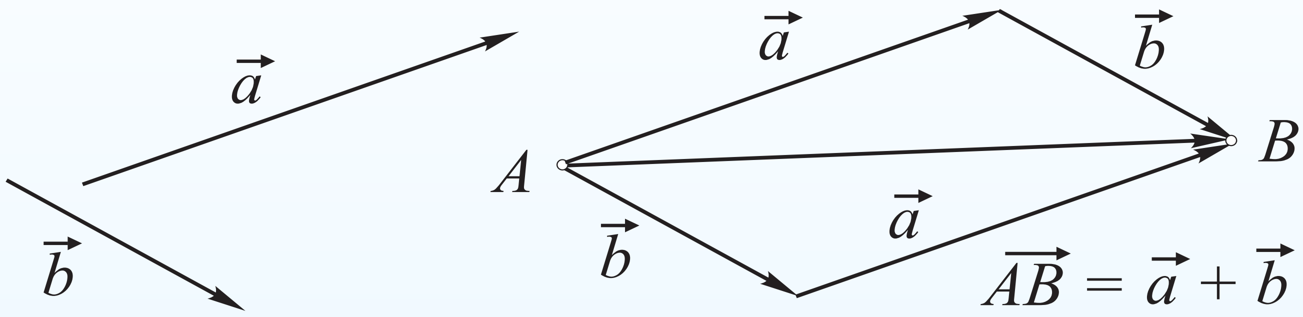
Def. Geomeetriliste vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ***summaks*** nimetatakse vektorit, mille alguspunktiks on vektori $\vec{a}$ alguspunkt ja lõpp-punktiks vektori $\vec{b}$ lõpp-punkt tingimusel, et vektor $\vec{b}$ on rakendatud vektori $\vec{a}$ lõpp-punktist.

Kolmnurga reegel:



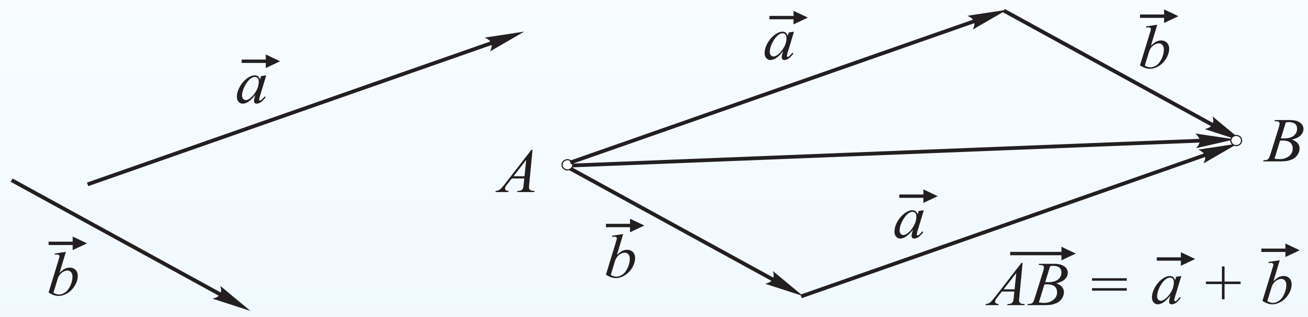
Geomeetriliste vektorite vektorruum

Rööpkülikureegel



Geomeetriliste vektorite vektorruum

Rööpkülikureegel



Hulknurgareegel