Vektorruum

Vektorruumi mõiste

Mati Väljas

mati.valjas@ttu.ee

Tallinna Tehnikaülikool

Lineaartehted

Olgu $\mathbb{V} = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \ldots\}$ mittetühi hulk. Defineerime sellel hulgal kaks tehet.

Lineaartehted

Olgu $\mathbb{V} = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \ldots\}$ mittetühi hulk. Defineerime sellel hulgal kaks tehet.

Def. Öeldakse, et hulgal $\mathbb{V}$ on defineeritud ***elementide liitmine***, kui igale paarile $(\vec{a}, \vec{b}) \in \mathbb{V} \times \mathbb{V}$ on seatud üheselt vastavusse element $\vec{c} \in \mathbb{V}$, s.t on määratud kujutus

$$\mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V} \quad (\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}.$$

Lineaartehted

Olgu $\mathbb{V} = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \ldots\}$ mittetühi hulk. Defineerime sellel hulgal kaks tehet.

Def. Öeldakse, et hulgal $\mathbb{V}$ on defineeritud ***elementide liitmine***, kui igale paarile $(\vec{a}, \vec{b}) \in \mathbb{V} \times \mathbb{V}$ on seatud üheselt vastavusse element $\vec{c} \in \mathbb{V}$, s.t on määratud kujutus

$$\mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V} \quad (\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}.$$

Def. Öeldakse, et hulgal $\mathbb{V}$ on defineeritud elemendi korrutamine reaaarvuga λ, kui igale paarile $(\lambda, \vec{a}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{V}$ on seatud üheselt vastavusse element $\lambda\vec{a} \in \mathbb{V}$, s.t on määratud kujutus

$$\mathbb{R} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V} \quad (\lambda, \vec{a}) \mapsto \vec{b} = \lambda\vec{a}.$$

Vektorruumi definitsioon

Hulka $\mathbb{V}$ nimetatakse ***vektorruumiks*** üle reaalarvude hulga $\mathbb{R}$, kui sellel hulgal on defineeritud kaks tehet $-$ elementide liitmine ja korrutamine reaalarvuga nii, et on täidetud tingimused:

1. $\forall \vec{a} \in \mathbb{V}, \forall \vec{b} \in \mathbb{V}$ korral $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (liitmise kommutatiivsus);

Vektorruumi definitsioon

Hulka $\mathbb{V}$ nimetatakse ***vektorruumiks*** üle reaalarvude hulga $\mathbb{R}$, kui sellel hulgal on defineeritud kaks tehet $-$ elementide liitmine ja korrutamine reaalarvuga nii, et on täidetud tingimused:

1. $\forall \vec{a} \in \mathbb{V}, \forall \vec{b} \in \mathbb{V}$ korral $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (liitmise kommutatiivsus);
2. $\forall \vec{a} \in \mathbb{V}, \forall \vec{b} \in \mathbb{V}, \forall \vec{c} \in \mathbb{V}$ korral $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (liitmise assotsiatiivsus);

Vektorruumi definitsioon

Hulka $\mathbb{V}$ nimetatakse ***vektorruumiks*** üle reaalarvude hulga $\mathbb{R}$, kui sellel hulgal on defineeritud kaks tehet $-$ elementide liitmine ja korrutamine reaalarvuga nii, et on täidetud tingimused:

1. $\forall \vec{a} \in \mathbb{V}, \forall \vec{b} \in \mathbb{V}$ korral $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (liitmise kommutatiivsus);
2. $\forall \vec{a} \in \mathbb{V}, \forall \vec{b} \in \mathbb{V}, \forall \vec{c} \in \mathbb{V}$ korral $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (liitmise assotsiatiivsus);
3. $\exists \vec{\theta} \in \mathbb{V}$ nii, et $\forall \vec{a} \in \mathbb{V}$ korral $\vec{a} + \vec{\theta} = \vec{a}$ (nullelemendi olemasolu);

Vektorruumi definitsioon

Hulka $\mathbb{V}$ nimetatakse ***vektorruumiks*** üle reaalarvude hulga $\mathbb{R}$, kui sellel hulgal on defineeritud kaks tehet $-$ elementide liitmine ja korrutamine reaalarvuga nii, et on täidetud tingimused:

1. $\forall \vec{a} \in \mathbb{V}, \forall \vec{b} \in \mathbb{V}$ korral $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
(liitmise kommutatiivsus);
2. $\forall \vec{a} \in \mathbb{V}, \forall \vec{b} \in \mathbb{V}, \forall \vec{c} \in \mathbb{V}$ korral $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
(liitmise assotsiatiivsus);
3. $\exists \vec{\theta} \in \mathbb{V}$ nii, et $\forall \vec{a} \in \mathbb{V}$ korral $\vec{a} + \vec{\theta} = \vec{a}$
(nullelemendi olemasolu);
4. $\forall \vec{a} \in \mathbb{V}$ korral $\exists -\vec{a} \in \mathbb{V}$ nii, et $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{\theta}$
(vastandelemendi olemasolu);

Vektorruumi definitsioon

Hulka $\mathbb{V}$ nimetatakse ***vektorruumiks*** üle reaalarvude hulga $\mathbb{R}$, kui sellel hulgal on defineeritud kaks tehet $-$ elementide liitmine ja korrutamine reaalarvuga nii, et on täidetud tingimused:

1. $\forall\vec{a}\in\mathbb{V}, \forall\vec{b}\in\mathbb{V}$ korral $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (liitmise kommutatiivsus);
2. $\forall\vec{a}\in\mathbb{V}, \forall\vec{b}\in\mathbb{V}, \forall\vec{c}\in\mathbb{V}$ korral $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (liitmise assotsiatiivsus);
3. $\exists\,\vec{\theta}\in\mathbb{V}$ nii, et $\forall\vec{a}\in\mathbb{V}$ korral $\vec{a}+\vec{\theta}=\vec{a}$ (nullelemendi olemasolu);
4. $\forall\vec{a}\in\mathbb{V}$ korral $\exists-\vec{a}\in\mathbb{V}$ nii, et $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{\theta}$ (vastandelemendi olemasolu);
5. $\forall\vec{a}\in\mathbb{V},\ 1\in\mathbb{R}$ korral $1\vec{a}=\vec{a}$ (ühikelemendiga korrutamine);

Vektorruumi definitsioon

6. $\forall \vec{a} \in \mathbb{V},\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mu \in \mathbb{R}$ korral $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$ (korpuse elemendiga korrutamise assotsiatiivsus);

Vektorruumi definitsioon

6. $\forall \vec{a} \in \mathbb{V},\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mu \in \mathbb{R}$ korral $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$
   (korpuse elemendiga korrutamise assotsiatiivsus);
7. $\forall \vec{a} \in \mathbb{V},\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \mu \in \mathbb{R}$ korral $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$
   (distributiivsus skalaariga korrutamise suhtes);

Vektorruumi definitsioon

6. $\forall \vec{a} \in \mathbb{V},\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mu \in \mathbb{R}$ korral $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$
   (korpuse elemendiga korrutamise assotsiatiivsus);
7. $\forall \vec{a} \in \mathbb{V},\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \mu \in \mathbb{R}$ korral $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$
   (distributiivsus skalaariga korrutamise suhtes);
8. $\forall \vec{a} \in \mathbb{V}, \forall \vec{b} \in \mathbb{V}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ korral $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$
   (distributiivsus liitmise suhtes).

Vektorruumi definitsioon

6. $\forall \vec{a} \in \mathbb{V},\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mu \in \mathbb{R}$ korral $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$
(korpuse elemendiga korrutamise assotsiatiivsus);
7. $\forall \vec{a} \in \mathbb{V},\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \mu \in \mathbb{R}$ korral $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$
(distributiivsus skalaariga korrutamise suhtes);
8. $\forall \vec{a} \in \mathbb{V}, \forall \vec{b} \in \mathbb{V},\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ korral $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$
(distributiivsus liitmise suhtes).

Vektorruumi elemente nimetatakse ***vektoriteks*** ja reaalarve skalaarideks ***skalaarideks***.

Vektorruumi definitsioon

6. $\forall \vec{a} \in \mathbb{V},\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mu \in \mathbb{R}$ korral $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$ (korpuse elemendiga korrutamise assotsiatiivsus);
7. $\forall \vec{a} \in \mathbb{V},\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \mu \in \mathbb{R}$ korral $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ (distributiivsus skalaariga korrutamise suhtes);
8. $\forall \vec{a} \in \mathbb{V}, \forall \vec{b} \in \mathbb{V}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ korral $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ (distributiivsus liitmise suhtes).

Vektorruumi elemente nimetatakse ***vektoriteks*** ja reaalarve skalaarideks ***skalaarideks***.

Tingimusi 1) – 8) nimetatakse ***vektorruumi aksioomideks***.

Lihtsamad järeldused

Vektorruumi aksioomidest saab teha mõned lihtsad järeldused. Näiteks aksioom 3) konstateerib nullvektori (nullelemendi) olemasolu, kuid jätab nende arvu lahtiseks.

Lihtsamad järeldused

Vektorruumi aksioomidest saab teha mõned lihtsad järeldused. Näiteks aksioom 3) konstateerib nullvektori (nullelemendi) olemasolu, kuid jätab nende arvu lahtiseks.

Lause. Vektorruumis leidub ainult üks nullvektor.

Lihtsamad järeldused

Vektorruumi aksioomidest saab teha mõned lihtsad järeldused. Näiteks aksioom 3) konstateerib nullvektori (nullelemendi) olemasolu, kuid jätab nende arvu lahtiseks.

Lause. Vektorruumis leidub ainult üks nullvektor.

Tõestus. Oletame väite vastaselt, et vektorruumis $\mathbb{V}$ eksisteerib kaks erinevat nullvektorit, $\vec{\theta_1} \neq \vec{\theta_2}$. Valime kõigepealt nullvektori rolli $\vec{\theta_2}$, seega

$$\vec{\theta_1} + \vec{\theta_2} = \vec{\theta_1},$$

valides nüüd nullvektoriks $\vec{\theta_1}$, saame

$$\vec{\theta_2} + \vec{\theta_1} = \vec{\theta_2},$$

Aksioomist 1) järeldub, et viimaste võrduste vasakud pooled on võrdsed, seega $\vec{\theta_1} = \vec{\theta_2}$, mis on vastuolus tehtud oletusega. □

Lihtsamad järeldused

Lause. Vektorruumis on igal vektoril ainult üks vastandvektor.

Lihtsamad järeldused

Lause. Vektorruumis on igal vektoril ainult üks vastandvektor.

Tõestus. Olgu vektori $\vec{a}$ vastandvektorid $\vec{b} \neq \vec{c}$, s.t

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{\theta} \quad \text{ja} \quad \vec{a} + \vec{c} = \vec{\theta}.$$

$$\vec{b} = \vec{\theta} + \vec{b} = (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{\theta} + \vec{c} = \vec{c}.$$

Tekkinud vastuolu tõestabki lause. $\square$

Lihtsamad järeldused

Lause. Vektorruumis on igal vektoril ainult üks vastandvektor.

Tõestus. Olgu vektori $\vec{a}$ vastandvektorid $\vec{b} \neq \vec{c}$, s.t

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{\theta} \quad \text{ja} \quad \vec{a} + \vec{c} = \vec{\theta}.$$

$$\vec{b} = \vec{\theta} + \vec{b} = (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{\theta} + \vec{c} = \vec{c}.$$

Tekkinud vastuolu tõestabki lause. $\square$

Lause. Iga vektori $\vec{a}$ korral $0\vec{a} = \vec{\theta}$.

Lihtsamad järeldused

Lause. Vektorruumis on igal vektoril ainult üks vastandvektor.

Tõestus. Olgu vektori $\vec{a}$ vastandvektorid $\vec{b} \neq \vec{c}$, s.t

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{\theta} \quad \text{ja} \quad \vec{a} + \vec{c} = \vec{\theta}.$$

$$\vec{b} = \vec{\theta} + \vec{b} = (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{\theta} + \vec{c} = \vec{c}.$$

Tekkinud vastuolu tõestabki lause. □

Lause. Iga vektori $\vec{a}$ korral $0\vec{a} = \vec{\theta}$.

Tõestus.

$$0\vec{a} = (0 + 0)\vec{a} = 0\vec{a} + 0\vec{a},$$

seega aksioomi 3) põhjal saame, $0\vec{a} = \vec{\theta}$. □

Lihtsamad järeldused

Lause. Iga vektori $\vec{a}$ vastandvektori $-\vec{a}$ määrab eeskiri

$$-\vec{a} = (-1)\vec{a}.$$

Lihtsamad järeldused

Lause. Iga vektori $\vec{a}$ vastandvektori $-\vec{a}$ määrab eeskiri

$$-\vec{a} = (-1)\vec{a}.$$

Tõestus.

$$\vec{a} + (-1)\vec{a} = 1\vec{a} + (-1)\vec{a} = (1-1)\vec{a} = 0\vec{a} = \vec{\theta},$$

järelikult $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$. $\square$

Lihtsamad järeldused

Lause. Iga vektori $\vec{a}$ vastandvektori $-\vec{a}$ määrab eeskiri

$$-\vec{a} = (-1)\vec{a}.$$

Tõestus.

$$\vec{a} + (-1)\vec{a} = 1\vec{a} + (-1)\vec{a} = (1-1)\vec{a} = 0\vec{a} = \vec{\theta},$$

järelikult $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$. $\square$

Kasutades vastandvektorit, saame defineerida vektorite liitmise pöördtehte ehk lahutamise

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$