Kompleksarvud

Kompleksarvu trigonomeetiline ja eksponentkuju

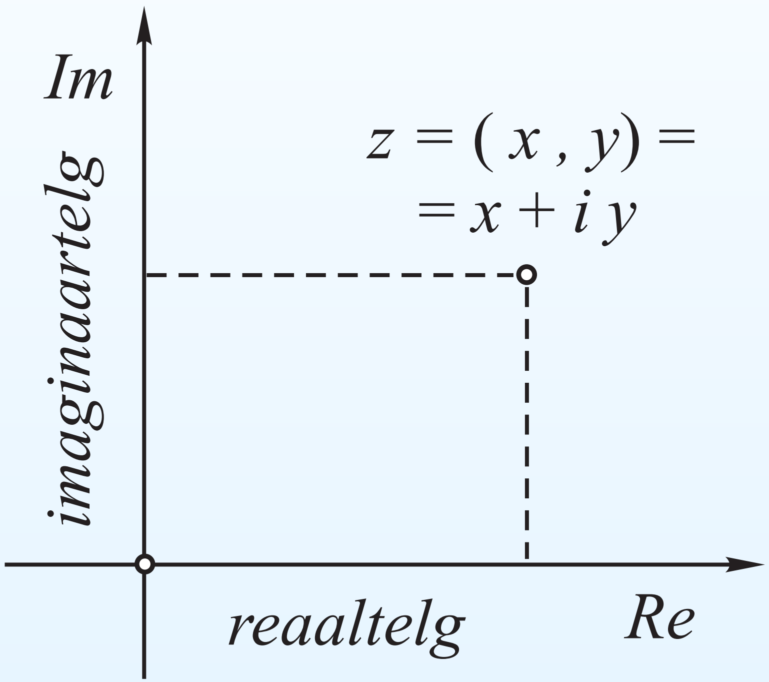
Mati Väljas

mati.valjas@ttu.ee

Tallinna Tehnikaülikool

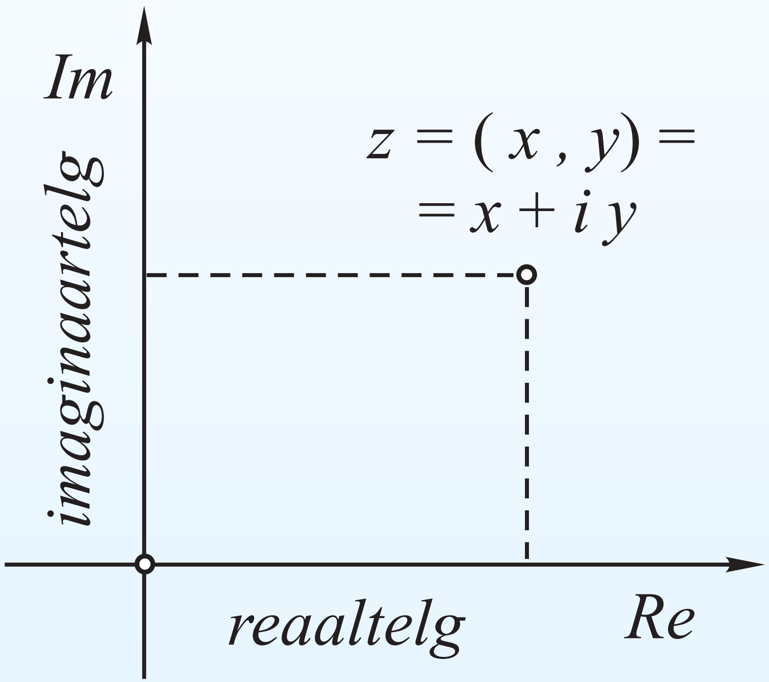
Komplekstasandtasand

Kompleksarve saab kujutada komplekstasandil punktidena. Selleks kasutasime tasandil ristkoordinaatide süsteemi, kus tasandi igal punktil on kaks reaalarvulist koordinaati.



Komplekstasandtasand

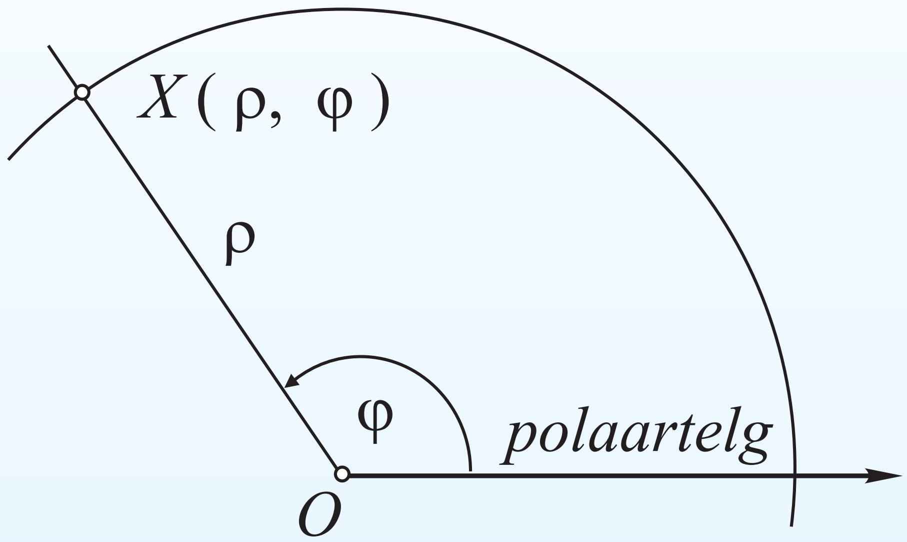
Kompleksarve saab kujutada komplekstasandil punktidena. Selleks kasutasime tasandil ristkoordinaatide süsteemi, kus tasandi igal punktil on kaks reaalarvulist koordinaati.



Tasandi igat punkti saame kirjeldada kahe koordinaadiga, s.o arvupaariga (x, y).

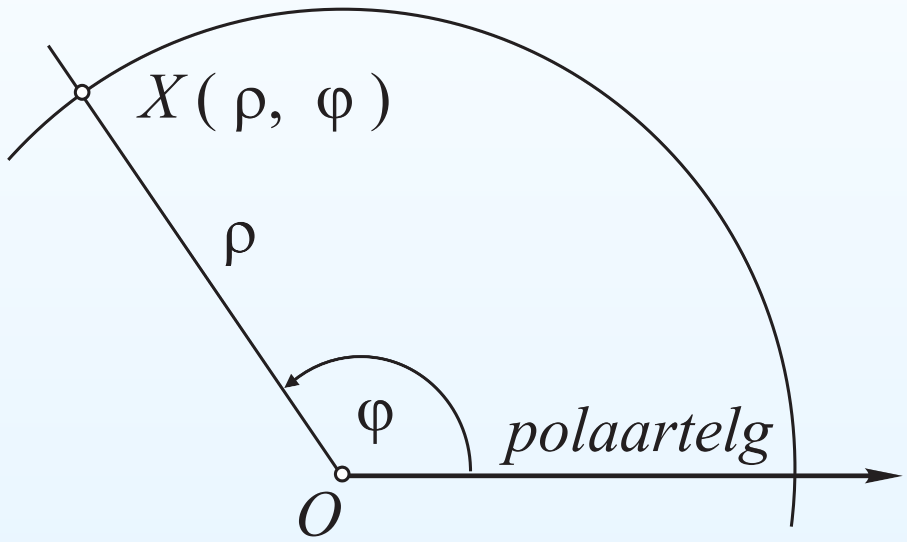
Polaarkoordinaadid

Tasandi punktide kirjeldamiseks võime valida ka teistsuguse koordinaatide süsteemi. Selleks fikseerime tasandil punktist O väljuva kiire.



Polaarkoordinaadid

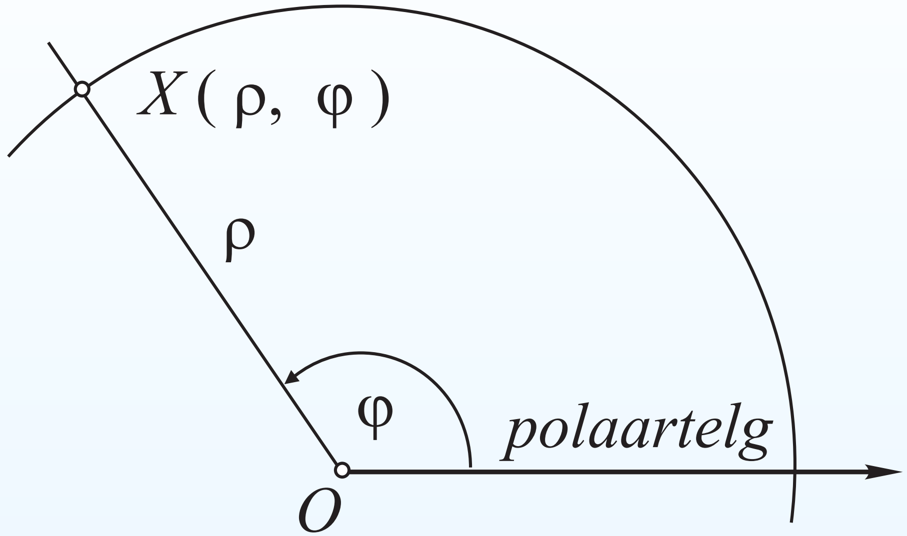
Tasandi punktide kirjeldamiseks võime valida ka teistsuguse koordinaatide süsteemi. Selleks fikseerime tasandil punktist O väljuva kiire.



Nüüd saame tasandi punkti X kirjeldamiseks kasutada samuti kahte reaalarvu:

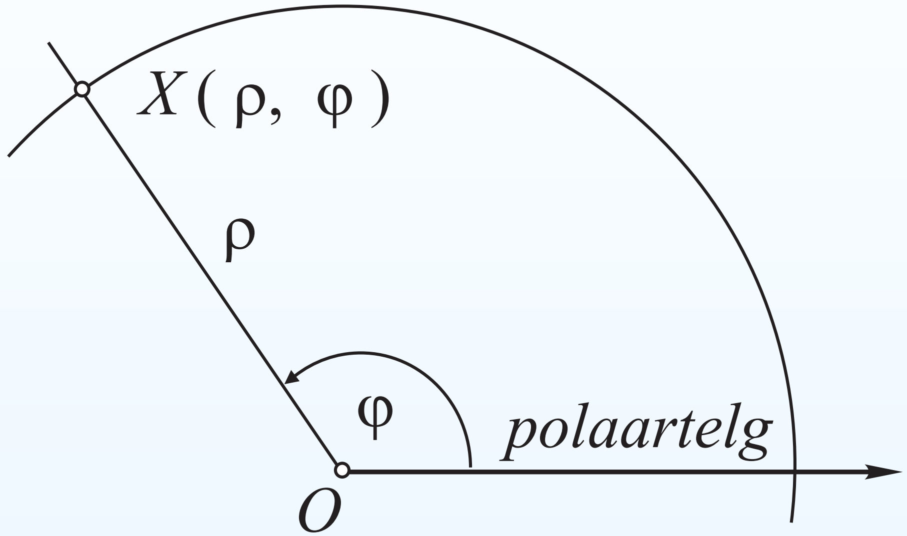
- ρ - punktide O ja X vaheline kaugus;
- $\varphi-$ nurk kiire ja sirglõigu OX vahel.

Polaarkoordinaadid



Tasandi igale punktile X saame vastavusse seada kaks koordinaati, ehk $X(\rho, \varphi)$. Selliselt konstrueeritud punkti X koordinaate nimetatakse ***polaarkoordinaatideks***.

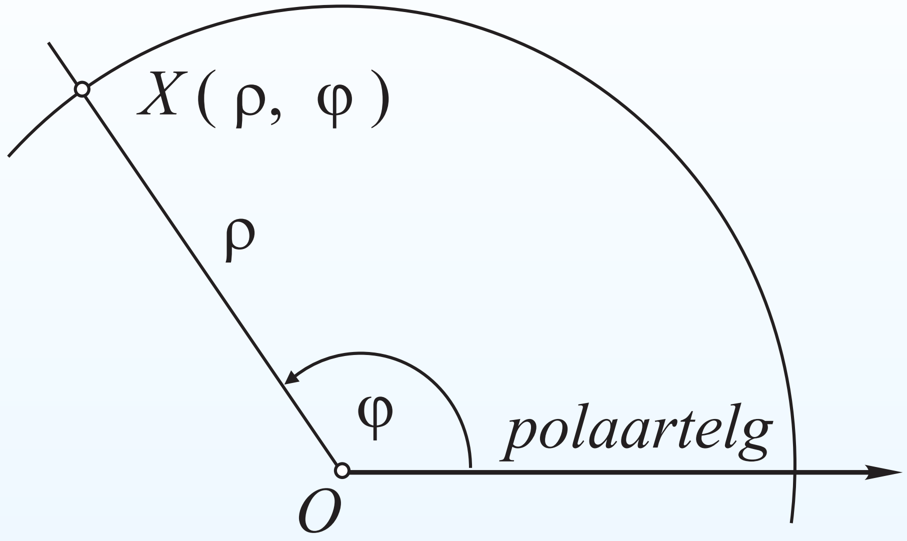
Polaarkoordinaadid



Tasandi igale punktile X saame vastavusse seada kaks koordinaati, ehk $X(\rho, \varphi)$. Selliselt konstrueeritud punkti X koordinaate nimetatakse ***polaarkoordinaatideks***.

Punkti X koordinaati ρ nimetatakse ***polaarraadiuseks***, koordinaati φ- ***polaarnurgaks***. Punkti O nimetatakse ***pooluseks*** ja sellest väljuvat kiirt ***polaarteljeks***.

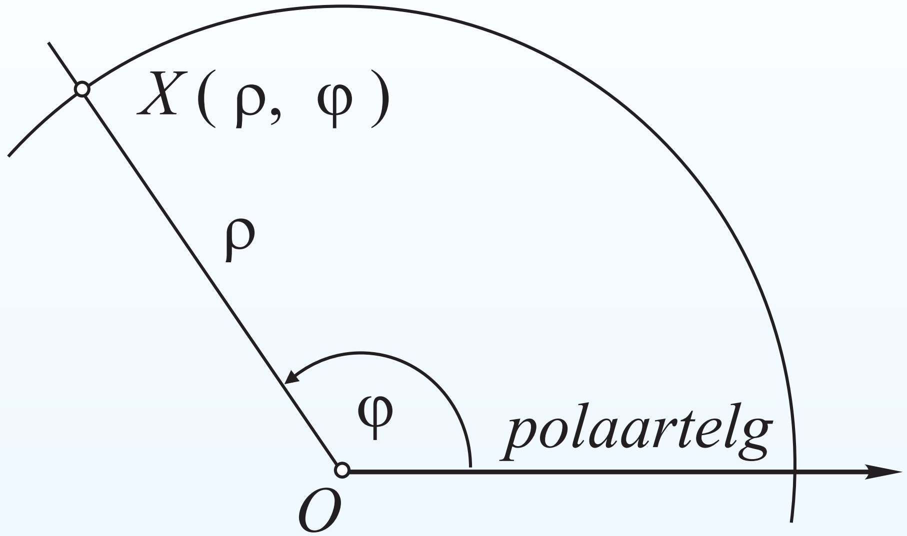
Polaarkoordinaatide määramispiirkond



Tasandi ühekordseks katmiseks polaarkoordinaatidega, peavad need omandama väärtused

$$0 \leqslant \rho < \infty \quad \text{ja} \quad -\pi < \varphi \leqslant \pi.$$

Polaarkoordinaatide määramispiirkond

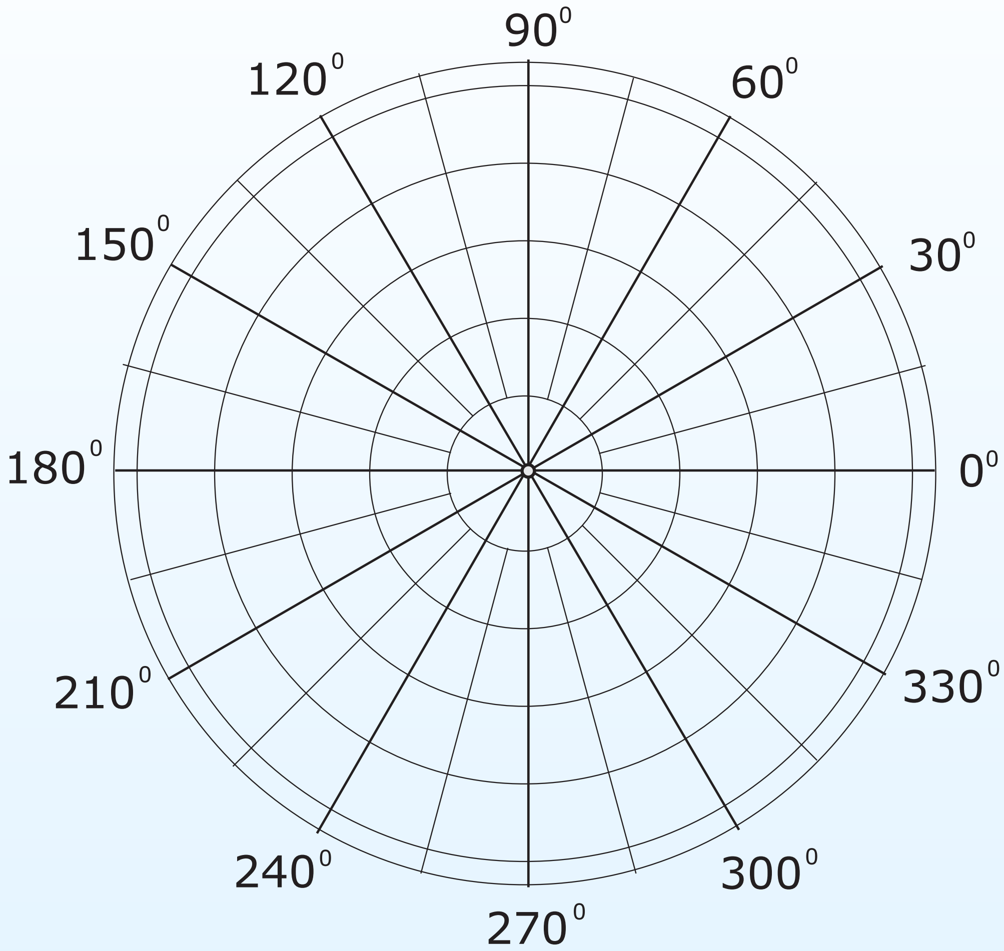


Tasandi ühekordseks katmiseks polaarkoordinaatidega, peavad need omandama väärtused

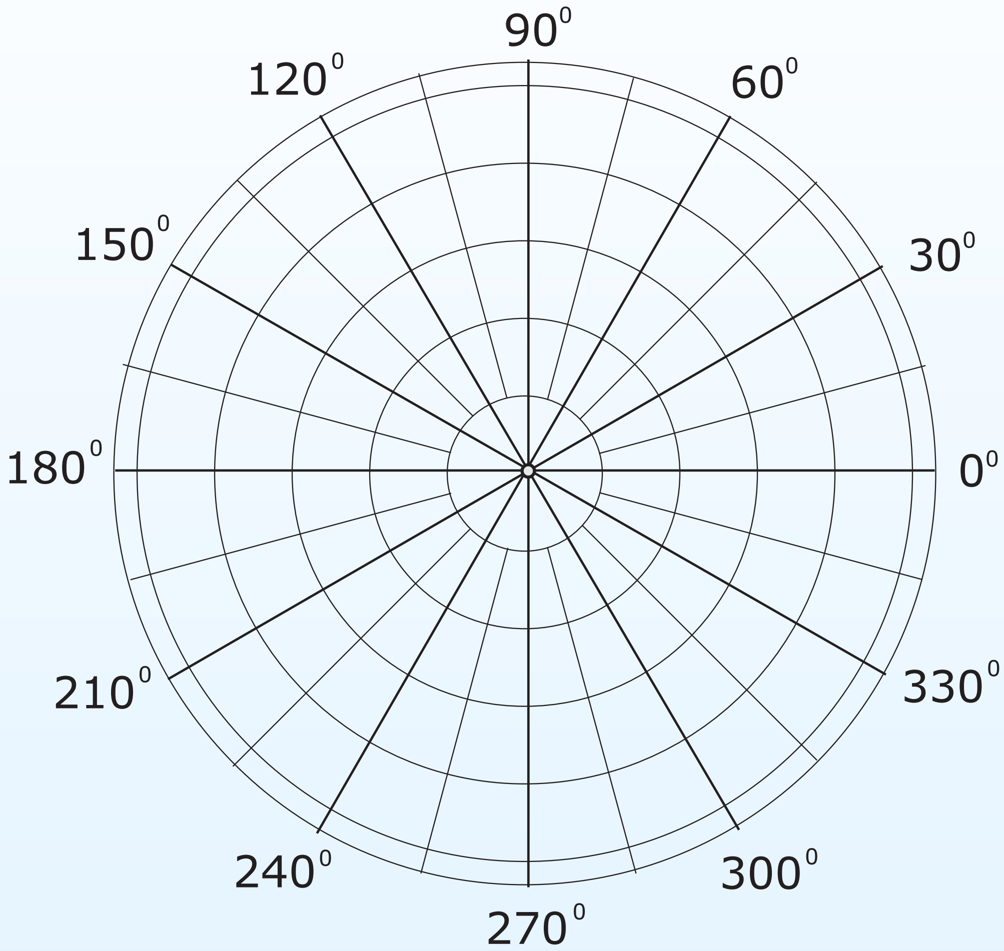
$$0 \leqslant \rho < \infty \quad \text{ja} \quad -\pi < \varphi \leqslant \pi.$$

Vastavalt kokkuleppele loetakse nurgad, mida mõõdetakse kellaosuti liikumisele vastassuunas, ***positiivseteks*** ja kellaosuti liikumise suunas mõõdetud nurgad loetakse ***negatiivseteks***.

Polaarkoordinaatide võrk

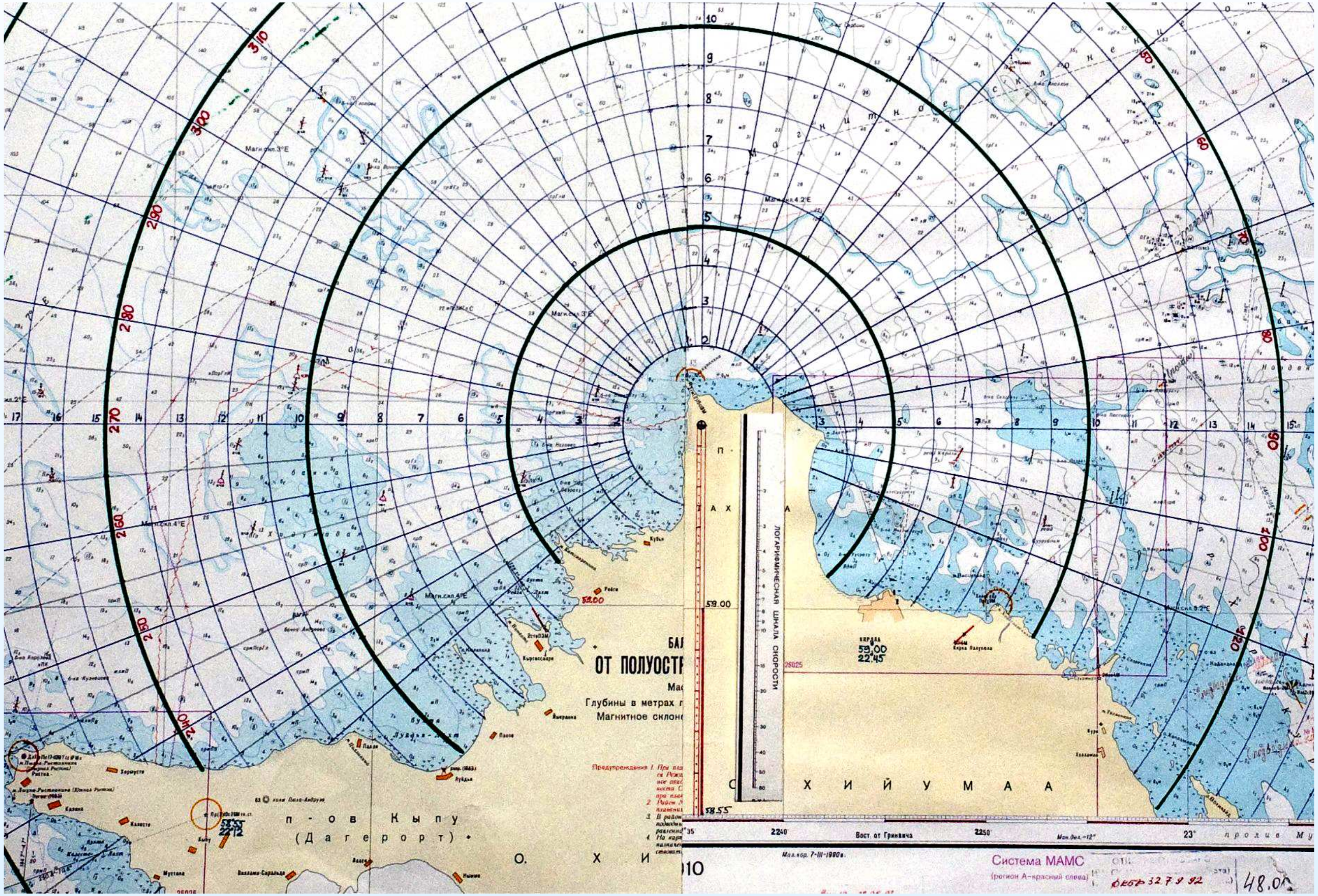


Polaarkoordinaatide võrk

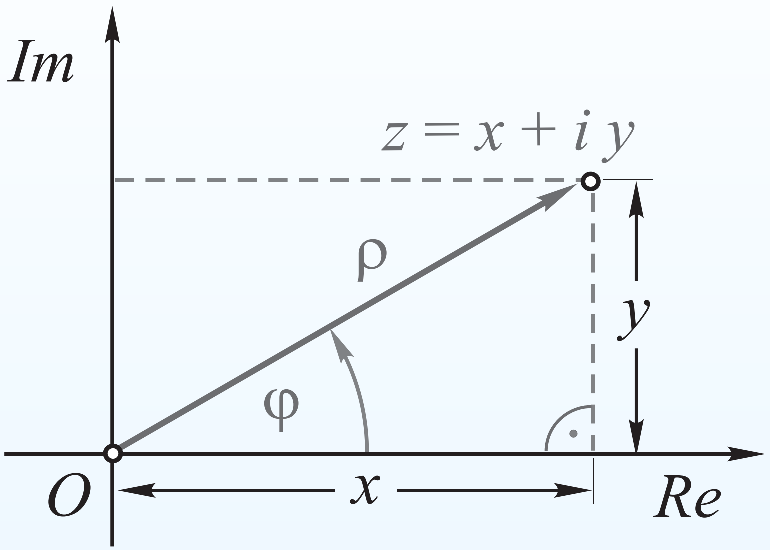


NB! Koordinaatide alguspunkti koordinaadid ei ole üheselt määratud!

Polaarkoordinaatide kasutamine

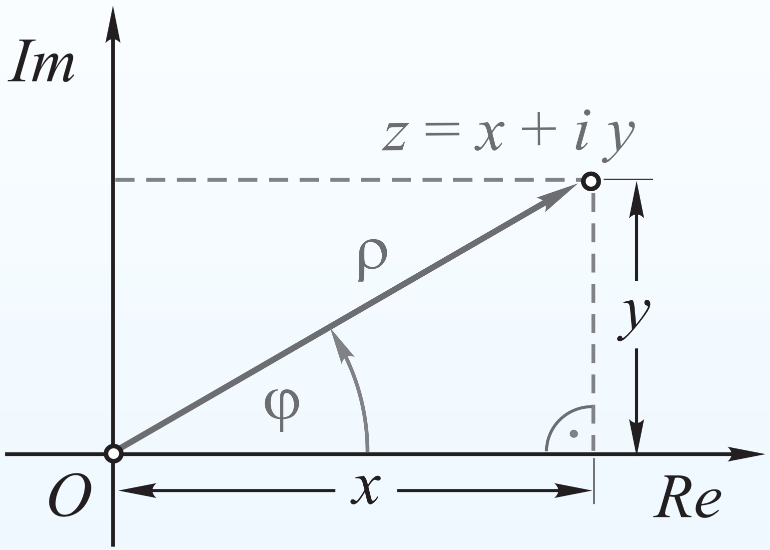


Polaar- ja ristkoordinaatide vaheline seos



Seome komplekstasandiga polaarkoordinaadid nii, et koordinaatide alguspunkt O on pooluseks ja reaaltelje postitiivne suund määrab polaartelje.

Polaar- ja ristkoordinaatide vaheline seos

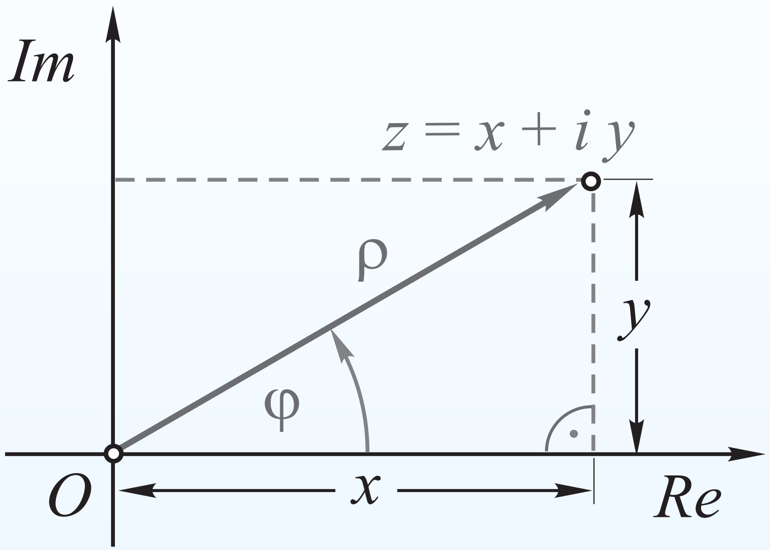


Seome komplekstasandiga polaarkoordinaadid nii, et koordinaatide alguspunkt O on pooluseks ja reaaltelje postitiivne suund määrab polaartelje.

Joonisel olevast täisnurksest kolmnurgast leiame, et

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

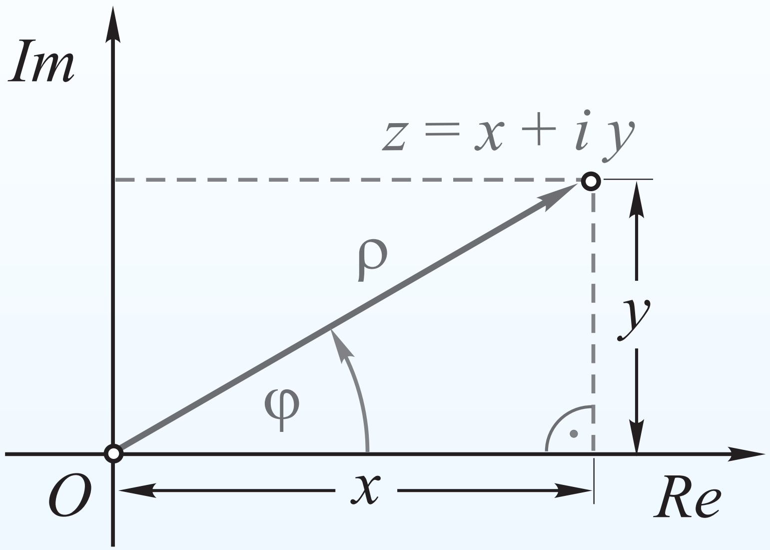
Polaar- ja ristkoordinaatide vaheline seos



Üleminekuvalemid polaarkoordinaatidelt ristkoordinaatidele

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Polaar- ja ristkoordinaatide vaheline seos



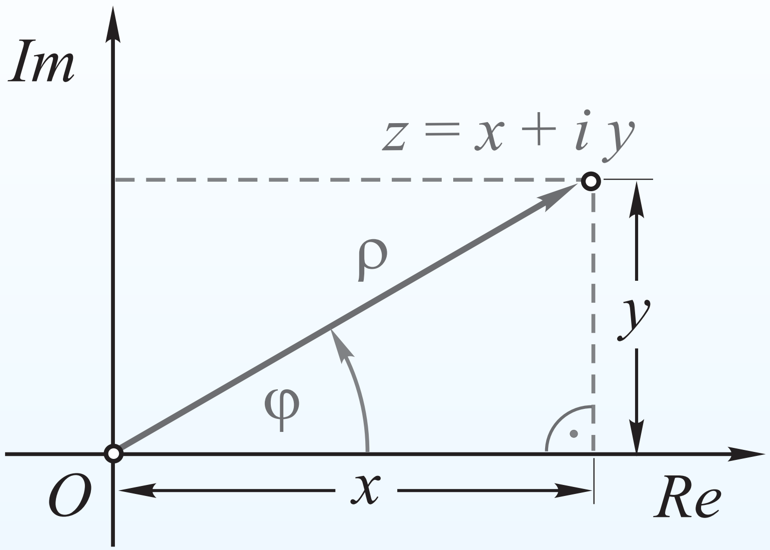
Üleminekuvalemid polaarkoordinaatidelt ristkoordinaatidele

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Kompeksarvu algebralisest kujust leiame:

$$z = x + iy = \rho\cos\varphi + i\rho\sin\varphi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

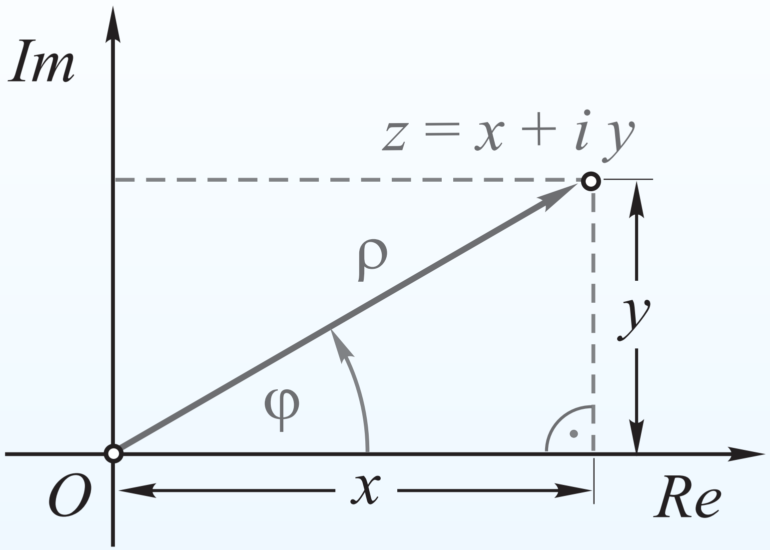
Kompleksarvu trigonomeetriline kuju



$$z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Seda nimetatakse ***kompleksarvu trigonomeetriliseks kujuks***.

Kompleksarvu trigonomeetriline kuju

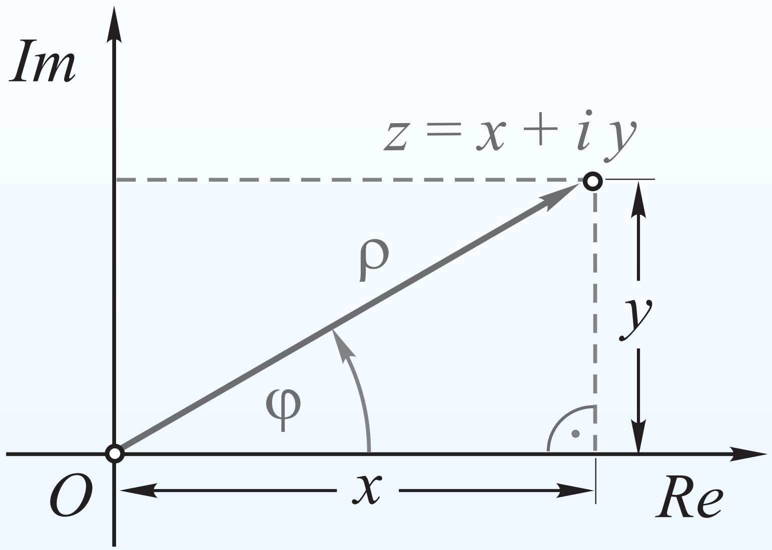


$$z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Seda nimetatakse ***kompleksarvu trigonomeetriliseks kujuks***.

Polaarraadiust ρ nimetatakse kompleksarvu z ***mooduliks*** ja nurka φ ***argumendiks*** ning tähistatakse $\varphi = \mathrm{Arg}(z)$.

Kompleksarvu moodul

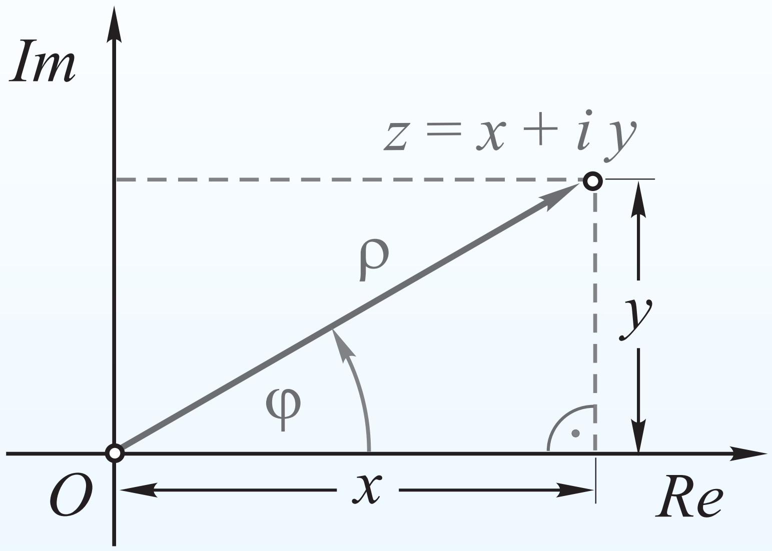


$$z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Pythagorase teoreemi põhjal:

$$\rho = |z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Kompleksarvu argumendi peaväärtus



$$z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Kompleksarvu z argumenti, mis kuulub poollõiku $(-\pi, \pi]$, nimetatakse ***argumendi peaväärtuseks*** ja tähistatakse $\arg(z)$, seega

$$-\pi < \arg(z) \leqslant \pi.$$

Kompleksarvu argument

Järelikult:

$$\mathrm{Arg}(z) = \arg(z) + 2k\pi, \quad \text{kus} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Kompleksarvu argument

Järelikult:

$$\mathrm{Arg}(z) = \arg(z) + 2k\pi, \quad \text{kus} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Kokkuvõtteks võime sõnastada:

Järeldus 1. Kaks trigonomeetrilisel kujul esitatud kompleksarvu on võrdsesd parajasti siis, kui

- nende kompleksarvude moodulid on võrdsed;
- nende kompleksarvude argumentide vahe on 2π kordne.

Kaaskompleksarv

Olgu antud kompleksarv $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Kaaskompleksarv

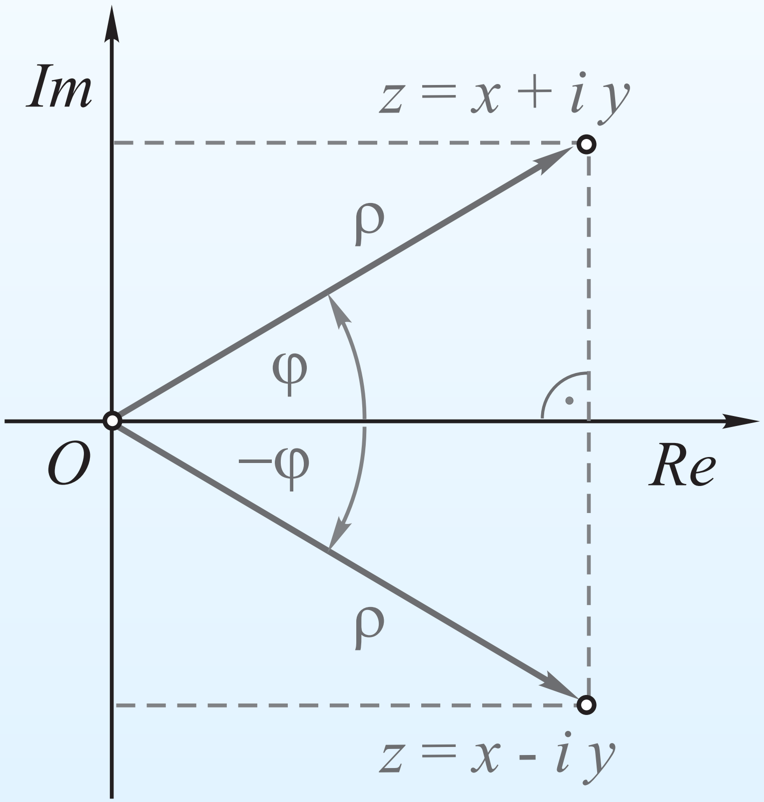
Olgu antud kompleksarv $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.
Sellele kompeksarvule vastav kaaskompleksarv on

$$\overline{z} = \rho\big(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \rho(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\big).$$

Kaaskompleksarv

Olgu antud kompleksarv $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.
Sellele kompeksarvule vastav kaaskompleksarv on

$$\overline{z} = \rho\big(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \rho(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\big).$$



Korrutamine trigonomeetrilisel kujul

Olgu trigonomeetrilisel kujul antud kaks kompleksarvu

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Korrutamine trigonomeetrilisel kujul

Olgu trigonomeetrilisel kujul antud kaks kompleksarvu

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Arvutame nende korrutise.

Korrutamine trigonomeetrilisel kujul

Olgu trigonomeetrilisel kujul antud kaks kompleksarvu

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Arvutame nende korrutise.

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

Korrutamine trigonomeetrilisel kujul

Olgu trigonomeetrilisel kujul antud kaks kompleksarvu

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Arvutame nende korrutise.

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= \rho_1\rho_2\big((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\big) =$$

Korrutamine trigonomeetrilisel kujul

Olgu trigonomeetrilisel kujul antud kaks kompleksarvu

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Arvutame nende korrutise.

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= \rho_1\rho_2\big((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\big) =$$

$$= \rho_1\rho_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big).$$

Korrutamine trigonomeetrilisel kujul

Olgu trigonomeetrilisel kujul antud kaks kompleksarvu

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Arvutame nende korrutise.

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= \rho_1\rho_2\big((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\big) =$$
$$= \rho_1\rho_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big).$$

Kokkuvõtteks:

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big).$$

Jagamine ja astendamine trigonomeetrilisel kujul

Olgu trigonomeetrilisel kujul antud kaks kompleksarvu

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \quad z_2 \neq 0.$$

Jagamine ja astendamine trigonomeetrilisel kujul

Olgu trigonomeetrilisel kujul antud kaks kompleksarvu

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \quad z_2 \neq 0.$$

Jagamise reegel (eksamil tuletada)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\Big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\Big).$$

Jagamine ja astendamine trigonomeetrilisel kujul

Olgu trigonomeetrilisel kujul antud kaks kompleksarvu

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \quad z_2 \neq 0.$$

Jagamise reegel (eksamil tuletada)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\Big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\Big).$$

Kui $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$z^n = \underbrace{\rho \cdot \ldots \cdot \rho}_{n \text{ tegurit}}\Big(\cos(\underbrace{\varphi + \ldots + \varphi}_{n \text{ liidetavat}}) + i\sin(\underbrace{\varphi + \ldots + \varphi}_{n \text{ liidetavat}})\Big)$$

Jagamine ja astendamine trigonomeetrilisel kujul

Olgu trigonomeetrilisel kujul antud kaks kompleksarvu

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \quad z_2 \neq 0.$$

Jagamise reegel (eksamil tuletada)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\Big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\Big).$$

Kui $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$z^n = \underbrace{\rho \cdot \ldots \cdot \rho}_{n \text{ tegurit}}\Big(\cos(\underbrace{\varphi + \ldots + \varphi}_{n \text{ liidetavat}}) + i\sin(\underbrace{\varphi + \ldots + \varphi}_{n \text{ liidetavat}})\Big)$$

$$z^n = \rho^n\Big(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\Big) \quad n > 0.$$

Astendamine trigonomeetrilisel kujul

Nõuame, et kompleksarvude korral kehtiksid reaalarvude aritmeetikast tuntud reeglid

$$a^0 = 1 \quad \text{ja} \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

Kui $n = 0$, siis

$$z^0 = \rho^0\big(\cos(0\varphi) + i\sin(0\varphi)\big) = 1\big(\cos 0 + i\sin 0\big) = 1.$$

Astendamine trigonomeetrilisel kujul

Oletame, et $n = -m$, kus m on positiivne täisarv. Siis

$$z^n = \rho^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \rho^{-m}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-m} =$$

$$= \frac{1}{\rho^m(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m} = \frac{1}{\rho^m\big(\cos(m\varphi) + i\sin(m\varphi)\big)} =$$

$$= \frac{1}{\rho^m}\big(\cos(m\varphi) - i\sin(m\varphi)\big) = \rho^{-m}\big(\cos(-m\varphi) + i\sin(-m\varphi)\big) =$$

$$= \rho^n\big(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\big).$$

Astendamine trigonomeetrilisel kujul

Oletame, et $n = -m$, kus m on positiivne täisarv. Siis

$$z^n = \rho^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \rho^{-m}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-m} =$$

$$= \frac{1}{\rho^m(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m} = \frac{1}{\rho^m\big(\cos(m\varphi) + i\sin(m\varphi)\big)} =$$

$$= \frac{1}{\rho^m}\big(\cos(m\varphi) - i\sin(m\varphi)\big) = \rho^{-m}\big(\cos(-m\varphi) + i\sin(-m\varphi)\big) =$$

$$= \rho^n\big(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\big).$$

Kokkuvõtteks:

$$z^n = \rho^n\big(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\big), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Moivre'i valem ja kompleksarvude juurimine

Erijuhul, kui $\rho = 1$, siis astendamise valemist järeldub

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi),$$

mida nimetatakse ***Moivre'i valemiks***.

Moivre'i valem ja kompleksarvude juurimine

Erijuhul, kui $\rho = 1$, siis astendamise valemist järeldub

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi),$$

mida nimetatakse ***Moivre'i valemiks***.

Kompleksarvu z n***-astme juureks*** $(n \in \mathbb{N})$ nimetatakse niisugust kompleksarvu ω, mille korral $\omega^n = z$, s.o

$$\sqrt[n]{z} = \omega \quad \Leftrightarrow \quad \omega^n = z.$$

Moivre'i valem ja kompleksarvude juurimine

Erijuhul, kui $\rho = 1$, siis astendamise valemist järeldub

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi),$$

mida nimetatakse ***Moivre'i valemiks***.

Kompleksarvu z n***-astme juureks*** $(n \in \mathbb{N})$ nimetatakse niisugust kompleksarvu ω, mille korral $\omega^n = z$, s.o

$$\sqrt[n]{z} = \omega \quad \Leftrightarrow \quad \omega^n = z.$$

Olgu

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad \text{ja} \quad \omega = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1).$$

Moivre'i valem ja kompleksarvude juurimine

Erijuhul, kui $\rho = 1$, siis astendamise valemist järeldub

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi),$$

mida nimetatakse ***Moivre'i valemiks***.

Kompleksarvu z n***-astme juureks*** $(n \in \mathbb{N})$ nimetatakse niisugust kompleksarvu ω, mille korral $\omega^n = z$, s.o

$$\sqrt[n]{z} = \omega \quad \Leftrightarrow \quad \omega^n = z.$$

Olgu

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad \text{ja} \quad \omega = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1).$$

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho_1^n\big(\cos(n\varphi_1) + i\sin(n\varphi_1)\big) = \omega^n$$

Kompleksarvude juurimine

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho_1^n\big(\cos(n\varphi_1) + i\sin(n\varphi_1)\big) = \omega^n$$

Kaks trigonomeetrilisel kujul esitatud kompleksarvu on võrdsesd parajasti siis, kui

- nende kompleksarvude moodulid on võrdsed;
- nende kompleksarvude argumentide vahe on 2π kordne.

Seega

$$\rho_1^n = \rho, \quad n\varphi_1 - \varphi = 2k\pi, \ \text{kus} \ k \in \mathbb{Z},$$

millest

$$\rho_1 = \sqrt[n]{\rho}, \quad \varphi_1 = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \ \text{kus} \ k \in \mathbb{Z}.$$

Kompleksarvude juurimine

$$\varphi_1 = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad \text{kus} \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots\}$$

Kompleksarvude juurimine

$$\varphi_1 = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad \text{kus} \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots\}$$

$$k = 0 \qquad \varphi_1 = \frac{\varphi}{n}$$

Kompleksarvude juurimine

$$\varphi_1 = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad \text{kus} \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots\}$$

$$k = 0 \qquad \varphi_1 = \frac{\varphi}{n}$$

$$k = 1 \qquad \varphi_1 = \frac{\varphi + 2\pi}{n}$$

Kompleksarvude juurimine

$$\varphi_1 = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad \text{kus} \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots\}$$

$$k = 0 \qquad \varphi_1 = \frac{\varphi}{n}$$

$$k = 1 \qquad \varphi_1 = \frac{\varphi + 2\pi}{n}$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$k = n \qquad \varphi_1 = \frac{\varphi + 2n\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi$$

Kompleksarvude juurimine

$$\varphi_1 = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad \text{kus } k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots\}$$

$$k = 0 \qquad \varphi_1 = \frac{\varphi}{n}$$

$$k = 1 \qquad \varphi_1 = \frac{\varphi + 2\pi}{n}$$

$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$k = n \qquad \varphi_1 = \frac{\varphi + 2n\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi$$

$$k = n+1 \qquad \varphi_1 = \frac{\varphi + 2(n+1)\pi}{n} = \frac{\varphi + 2\pi}{n} + 2\pi$$

$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Kompleksarvude juurimine

Kokkuvõtteks, kui $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, siis

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

Kompleksarvu eksponentkuju

Matemaatilise analüüsi kursuses näidatakse, et pidevalt diferentseeruv funktsioon $f(x)$ on esitatav Maclaurini reana.

Kompleksarvu eksponentkuju

Matemaatilise analüüsi kursuses näidatakse, et pidevalt diferentseeruv funktsioon $f(x)$ on esitatav Maclaurini reana. Näiteks:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n,$$

Kompleksarvu eksponentkuju

Matemaatilise analüüsi kursuses näidatakse, et pidevalt diferentseeruv funktsioon $f(x)$ on esitatav Maclaurini reana. Näiteks:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n,$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

Kompleksarvu eksponentkuju

Matemaatilise analüüsi kursuses näidatakse, et pidevalt diferentseeruv funktsioon $f(x)$ on esitatav Maclaurini reana. Näiteks:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n,$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Euleri valem

Asendame e^x Maclaurini reas oleva muutuja x imaginaararvuga $i\varphi$, saame kompleksarvude summa:

$$e^{i\varphi} = 1 + \frac{1}{1!}i\varphi + \frac{1}{2!}(i\varphi)^2 + \frac{1}{3!}(i\varphi)^3 + \frac{1}{4!}(i\varphi)^4 + \frac{1}{5!}(i\varphi)^5 + \dots$$

Euleri valem

Asendame e^x Maclaurini reas oleva muutuja x imaginaararvuga $i\varphi$, saame kompleksarvude summa:

$$e^{i\varphi} = 1 + \frac{1}{1!}i\varphi + \frac{1}{2!}(i\varphi)^2 + \frac{1}{3!}(i\varphi)^3 + \frac{1}{4!}(i\varphi)^4 + \frac{1}{5!}(i\varphi)^5 + \ldots$$

Teisendame paremal pool oleva kompleksarvu algebarlisele kujule

$$e^{i\varphi} = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2!}\varphi^2 + \frac{1}{4!}\varphi^4 - \ldots\right)}_{\cos\varphi} + i\underbrace{\left(\varphi - \frac{1}{3!}\varphi^3 + \frac{1}{5!}\varphi^5 - \ldots\right)}_{\sin\varphi}.$$

Euleri valem

Asendame e^x Maclaurini reas oleva muutuja x imaginaararvuga $i\varphi$, saame kompleksarvude summa:

$$e^{i\varphi} = 1 + \frac{1}{1!}i\varphi + \frac{1}{2!}(i\varphi)^2 + \frac{1}{3!}(i\varphi)^3 + \frac{1}{4!}(i\varphi)^4 + \frac{1}{5!}(i\varphi)^5 + \ldots$$

Teisendame paremal pool oleva kompleksarvu algebarlisele kujule

$$e^{i\varphi} = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2!}\varphi^2 + \frac{1}{4!}\varphi^4 - \ldots\right)}_{\cos\varphi} + i\underbrace{\left(\varphi - \frac{1}{3!}\varphi^3 + \frac{1}{5!}\varphi^5 - \ldots\right)}_{\sin\varphi}.$$

Euleri valem

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Kompleksarvu eksponentkuju

Euleri valem

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Kompleksarvu eksponentkuju

Euleri valem

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Kasutades komplekarvu trigonomeetrilist kuju ja Euleri valemit

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}.$$

Kompleksarvu eksponentkuju

Euleri valem

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Kasutades komplekarvu trigonomeetrilist kuju ja Euleri valemit

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}.$$

Kompeksarvu eksponentkuju on

$$z = \rho e^{i\varphi}.$$

Tehted eksponentkujul antud kompleksarvudega

Olgu kompleksarvud z_1 ja z_2 esiatatud eksponentkujul:

$$z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \quad \text{ja} \quad z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}.$$

Tehted eksponentkujul antud kompleksarvudega

Olgu kompleksarvud z_1 ja z_2 esiatatud eksponentkujul:

$$z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \quad \text{ja} \quad z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}.$$

$$z_1 z_2 \quad = \quad \rho_1 \rho_2 \, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)};$$

Tehted eksponentkujul antud kompleksarvudega

Olgu kompleksarvud z_1 ja z_2 esiatatud eksponentkujul:

$$z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \quad \text{ja} \quad z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}.$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1 \rho_2 \, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}; \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \, e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad z_2 \neq 0; \end{aligned}$$

Tehted eksponentkujul antud kompleksarvudega

Olgu kompleksarvud z_1 ja z_2 esiatatud eksponentkujul:

$$z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \quad \text{ja} \quad z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}.$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1 \rho_2 \, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}; \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \, e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad z_2 \neq 0; \\ z^n &= \rho^n e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{Z}; \end{aligned}$$

Tehted eksponentkujul antud kompleksarvudega

Olgu kompleksarvud z_1 ja z_2 esiatatud eksponentkujul:

$$z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \quad \text{ja} \quad z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}.$$

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= \rho_1 \rho_2 \, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}; \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \, e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \qquad z_2 \neq 0; \\
z^n &= \rho^n e^{in\varphi}, \qquad n \in \mathbb{Z};
\end{aligned}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \qquad k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}.$$