

Kompleksarvud

Kompleksarvu algebraline kuju

Mati Väljas

`mati.valjas@ttu.ee`

Tallinna Tehnikaülikool

Hulk

Hulk on kaasaegse matemaatika algmõiste, mida ei saa defineerida sellest üldisemate mõistete kaudu. Hulk on mingite objektide terviklik kogum, mille objektid on omavahel eristatavad. Iga objekti korral on võimalik otsustada, kas see kuulub vaadeldavasse hulka või mitte. Neid objekte, mis moodustavad mingi hulga, nimetame edaspidi selle hulga **elementideks**.

Hulk

Hulk on kaasaegse matemaatika algmõiste, mida ei saa defineerida sellest üldisemate mõistete kaudu. Hulk on mingite objektide terviklik kogum, mille objektid on omavahel eristatavad. Iga objekti korral on võimalik otsustada, kas see kuulub vaadeldavasse hulka või mitte. Neid objekte, mis moodustavad mingi hulga, nimetame edaspidi selle hulga **elementideks**.

Hulk loetakse kirjeldatuks, kui on teada omadused, mis on selle hulga kõigil elementidel ja ainult neil.

Hulk

Hulk on kaasaegse matemaatika algmõiste, mida ei saa defineerida sellest üldisemate mõistete kaudu. Hulk on mingite objektide terviklik kogum, mille objektid on omavahel eristatavad. Iga objekti korral on võimalik otsustada, kas see kuulub vaadeldavasse hulka või mitte. Neid objekte, mis moodustavad mingi hulga, nimetame edaspidi selle hulga **elementideks**.

Hulk loetakse kirjeldatuks, kui on teada omadused, mis on selle hulga kõigil elementidel ja ainult neil.

Olgu \mathbb{C} reaalarvude järjestatud paaride hulk, s.o

$$\mathbb{C} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \ \& \ y \in \mathbb{R}\}$$

Kompleksarvu definitsioon

Hulka \mathbb{C} nimetatatakse **kompleksarvude hulgaks**, kui sellel hulgal on defineeritud elementide võrdus, liitmine ja korrutamine järgmiselt:

- iga kaks paari on võrdsed

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \ \& \ y_1 = y_2;$$

Kompleksarvu definitsioon

Hulka \mathbb{C} nimetatatakse **kompleksarvude hulgaks**, kui sellel hulgal on defineeritud elementide võrdus, liitmine ja korrutamine järgmiselt:

- iga kaks paari on võrdsed

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \ \& \ y_1 = y_2;$$

- iga kahe paari summa

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2);$$

Kompleksarvu definitsioon

Hulka \mathbb{C} nimetatatakse **kompleksarvude hulgaks**, kui sellel hulgal on defineeritud elementide võrdus, liitmine ja korrutamine järgmiselt:

- iga kaks paari on võrdsed

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \ \& \ y_1 = y_2;$$

- iga kahe paari summa

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2);$$

- iga kahe paari korrutis

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Kompleksarvu definitsioon

Hulka \mathbb{C} nimetatatakse **kompleksarvude hulgaks**, kui sellel hulgal on defineeritud elementide võrdus, liitmine ja korrutamine järgmiselt:

- iga kaks paari on võrdsed

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \ \& \ y_1 = y_2;$$

- iga kahe paari summa

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2);$$

- iga kahe paari korrutis

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

- Hulga \mathbb{C} elemente nimetatakse **kompleksarvudeks**.

Kompleksarvu algebraline kuju

Kasutades kompleksarvude liitmise ja korrutamise tehteid võime mistahes kompleksarvu $z = (x, y)$ esitada kujul

$$z = (x, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1).$$

Kompleksarvu algebraline kuju

Kasutades kompleksarvude liitmise ja korrutamise tehteid võime mistahes kompleksarvu $z = (x, y)$ esitada kujul

$$z = (x, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1).$$

Arvupaarid, mille teine element on võrdne nulliga, käituvad defineeritud tehete korral sarnaselt reaalarvudega. Tõepoolest:

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0),$$

$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 \cdot x_2, 0).$$

Kompleksarvu algebraline kuju

Kasutades kompleksarvude liitmise ja korrutamise tehteid võime mistahes kompleksarvu $z = (x, y)$ esitada kujul

$$z = (x, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1).$$

Arvupaarid, mille teine element on võrdne nulliga, käituvad defineeritud tehete korral sarnaselt reaalarvudega. Tõepoolest:

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0),$$

$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 \cdot x_2, 0).$$

Defineerime üksühese kujutuse

$$\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, 0) \mapsto x.$$

Kompleksarvu algebraline kuju

$$z = (x, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1).$$

Kompleksarvu algebraline kuju

$$z = (x, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1).$$

Erilise kujuga kompleksarvu, ehk paari $(0, 1)$ nimetatakse ***imaginaarühikuks*** ja tähistatakse

$$i = (0, 1).$$

Kompleksarvu algebraline kuju

$$z = (x, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1).$$

Erilise kujuga kompleksarvu, ehk paari $(0, 1)$ nimetatakse ***imaginaarühikuks*** ja tähistatakse

$$i = (0, 1).$$

Arvutame

$$i^2 = (0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Kompleksarvu algebraline kuju

$$z = (x, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1).$$

Erilise kujuga kompleksarvu, ehk paari $(0, 1)$ nimetatakse ***imaginaarühikuks*** ja tähistatakse

$$i = (0, 1).$$

Arvutame

$$i^2 = (0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Kasutades tähistusi $(x, 0) \equiv x$ ja $(y, 0) \equiv y$ ning $(0, 1) = i$ saame

$$z = (x, y) = x + iy.$$

Kompleksarvu algebraline kuju

$$z = (x, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1).$$

Erilise kujuga kompleksarvu, ehk paari $(0, 1)$ nimetatakse ***imaginaarühikuks*** ja tähistatakse

$$i = (0, 1).$$

Arvutame

$$i^2 = (0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Kasutades tähistusi $(x, 0) \equiv x$ ja $(y, 0) \equiv y$ ning $(0, 1) = i$ saame

$$z = (x, y) = x + iy.$$

Viimast nimetatakse ***kompleksarvu algebraliseks kujuks***.

Kompleksarvu algebraline kuju

$$z = (x, y) = x + iy.$$

Funktsioonide

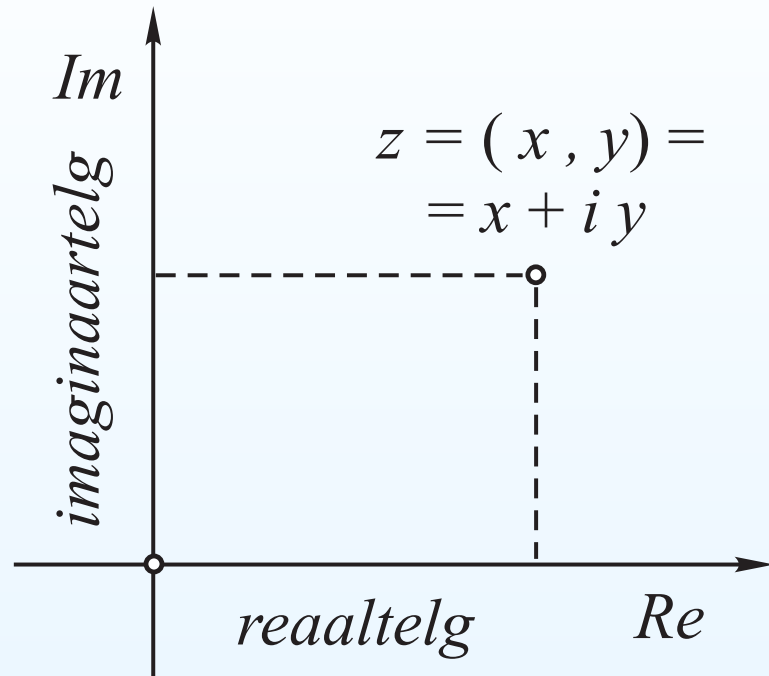
$$\operatorname{Re} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \quad z = x + iy \mapsto x = \operatorname{Re}(z),$$

ja

$$\operatorname{Im} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \quad z = x + iy \mapsto y = \operatorname{Im}(z),$$

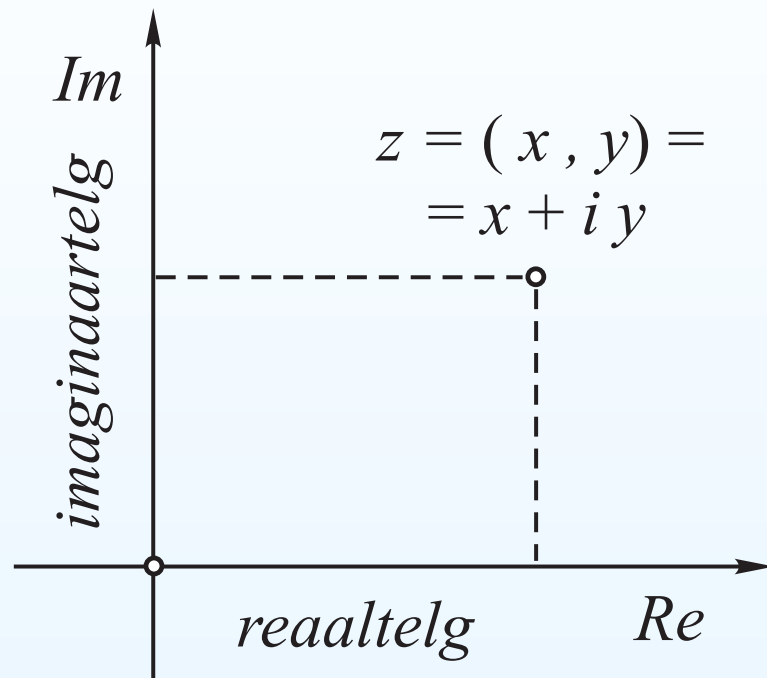
väärtusi nimetatakse vastavalt **kompleksarvu reaalosaks** ja **imaginaarosaks**.

Komplekstasand



Tasandi igat punkti saame kirjeldada kahe koordinaadiga, s.o arvupaariga (x, y) .

Komplekstasand



Tasandi igat punkti saame kirjeldada kahe koordinaadiga, s.o arvupaariga (x, y) .

Tasandit, mille igale punktile on vastavusse seatud kompleksarv $z = (x, y)$, nimetatakse **komplekstasandiks**.

Kaaskompleksarv

Kompleksarvu $z = (x, y)$ **kaaskompleksarvuks** nimetatakse kompleksarvu

$$\bar{z} = (x, -y) = x - iy.$$

Kaaskompleksarv

Kompleksarvu $z = (x, y)$ **kaaskompleksarvuks** nimetatakse kompleksarvu

$$\bar{z} = (x, -y) = x - iy.$$

Arvutame korrutise

$$z\bar{z} = (x, y)(x, -y) = (x^2 + y^2, 0) = x^2 + y^2,$$

Kaaskompleksarv

Kompleksarvu $z = (x, y)$ **kaaskompleksarvuks** nimetatakse kompleksarvu

$$\bar{z} = (x, -y) = x - iy.$$

Arvutame korrutise

$$z\bar{z} = (x, y)(x, -y) = (x^2 + y^2, 0) = x^2 + y^2,$$

millest järeldub, et see korrutis on positiivne reaalarv, s.o $z\bar{z} \in \mathbb{R}$. Viimasest võrdusest järeldub, et

$$z\bar{z} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y = 0.$$

Pöödrkompleksarv

Nullist erineva kompleksarvu $z = (x, y)$ **pöödrkompleksarvuks** nimetatakse kompleksarvu

$$z^{-1} = \frac{1}{x^2 + y^2} (x, -y).$$

Pöödrkompleksarv

Nullist erineva kompleksarvu $z = (x, y)$ **pöödrkompleksarvuks** nimetatakse kompleksarvu

$$z^{-1} = \frac{1}{x^2 + y^2} (x, -y).$$

Arvutame kompleksarvu z ja tema pöödarvu z^{-1} korrutise:

$$zz^{-1} = \frac{1}{x^2 + y^2} (x, y)(x, -y) = \frac{1}{x^2 + y^2} (x^2 + y^2, 0) = (1, 0) = 1.$$

Kompleksarvude jagamine

Kompeksarvude z_1 ja $z_2 \neq 0$ jagatiseks nimetatakse kompleksarvu

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}.$$

Kompleksarvude jagamine

Kompleksarvude z_1 ja $z_2 \neq 0$ jagatiseks nimetatakse kompleksarvu

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}.$$

Olgu $z_1 = (x_1, y_1)$ ja $z_2 = (x_2, y_2)$ kaks kompleksarvu, siis

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= z_1 z_2^{-1} = (x_1, y_1) \cdot \frac{1}{x_2^2 + y_2^2} (x_2, -y_2) = \\ &= \frac{1}{x_2^2 + y_2^2} (x_1, y_1) (x_2, -y_2) = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}. \end{aligned}$$

Kompleksarvude jagamine

Kompleksarvude z_1 ja $z_2 \neq 0$ jagatiseks nimetatakse kompleksarvu

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}.$$

Olgu $z_1 = (x_1, y_1)$ ja $z_2 = (x_2, y_2)$ kaks kompleksarvu, siis

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= z_1 z_2^{-1} = (x_1, y_1) \cdot \frac{1}{x_2^2 + y_2^2} (x_2, -y_2) = \\ &= \frac{1}{x_2^2 + y_2^2} (x_1, y_1)(x_2, -y_2) = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}. \end{aligned}$$

Siit järeldub, et kompleksarvude z_1 ja z_2 jagatise leidmiseks tuleb murdu $\frac{z_1}{z_2}$ laiendada nimetaja kaaskompleksarvuga \bar{z}_2 .

Tehted algebralisel kujul antud kompleksarvudega

Olgu antud algebralisel kujul kaks kompleksarvu

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad \text{ja} \quad z_2 = x_2 + iy_2,$$

siis:

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 \quad \& \quad y_1 = y_2;$$

Tehted algebralisel kujul antud kompleksarvudega

Olgu antud algebralisel kujul kaks kompleksarvu

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad \text{ja} \quad z_2 = x_2 + iy_2,$$

siis:

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 \quad \& \quad y_1 = y_2;$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$$

Tehted algebraisel kujul antud kompleksarvudega

Olgu antud algebraisel kujul kaks kompleksarvu

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad \text{ja} \quad z_2 = x_2 + iy_2,$$

siis:

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 \quad \& \quad y_1 = y_2;$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1);$$

Tehted algebraisel kujul antud kompleksarvudega

Olgu antud algebraisel kujul kaks kompleksarvu

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad \text{ja} \quad z_2 = x_2 + iy_2,$$

siis:

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 \quad \& \quad y_1 = y_2;$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1);$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Tehete omadused

Liitmise kommutatiivsus:

$$\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C} \quad \text{korral} \quad z_1 + z_2 = z_2 + z_1.$$

Tehete omadused

Liitmise kommutatiivsus:

$$\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C} \quad \text{korral} \quad z_1 + z_2 = z_2 + z_1.$$

Tõestus.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \\ &= (x_2 + x_1, y_2 + y_1) \stackrel{\text{def}}{=} (x_2, y_2) + (x_1, y_1) = z_2 + z_1. \end{aligned}$$

□

Tehete omadused

Korrutamise kommutatiivsus:

$$\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C} \quad \text{korral} \quad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1.$$

Tehete omadused

Korrutamise kommutatiivsus:

$$\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C} \quad \text{korral} \quad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1.$$

Tõestus.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) = \\ &= (x_2x_1 - y_2y_1, y_2x_1 + y_1x_2) \stackrel{\text{def}}{=} (x_2, y_2) \cdot (x_1, y_1) = z_2 \cdot z_1. \end{aligned}$$

□

Tehete omadused

Korrutamise assotsiatiivsus:

$$\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C}, \forall z_3 \in \mathbb{C} \quad \text{korral} \quad z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$$

Tehete omadused

Distributiivsus:

$$\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C}, \forall z_3 \in \mathbb{C} \quad \text{korral} \quad z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

Kaaskompleksarvude omadused:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$\overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}$$