Sadulpunktita maatriksmängud

23. november 2016. a.

Maatriksmängul puudub sadulpunkt, kui $a < b$, so mängu alumine ja ülemine hind ei ole võrdsed.

Sellisel juhul mängu lahendamine ei ole enam nii lihtne, kui see oli sadulpunktiga mängu korral ja mängu tulemus ei ole enam nii täpselt määratud.

Sadulpunktita mängu tulemuse määramatus on seotud asjaoluga, et ohutuimast strateegiast kõrvalekaldumine võib sellise mängu korral tuua mängijale kasu.

Sadulpunktita maatrikamängu korral ei tohi vastasmängija aimata kasutatavat strateegiat. Seda infot saab vastasmängija kasutada oma võidu suurendamiseks.

Kautatava strateegia etteaimamise võimaluse saame täielikult välistada ainult siis, kui mängija ise ei tea, millist strateegiat ta kavatseb kasutada.

Selline olukord on võimalik tekitada siis, kui mängija otsustab strateegiate kasutamise sageduse ehk nende kasutamise tõenäosuse järgi. Näiteks võtab loosi, millist strateegiat kasutab.

Mängus mitme strateegia kasutamist juhuslikus järjekorras **segastrateegiaks**.

Sadulpunktiga mängudes kasutatavat strateegiat nimetatakse **puhasteks strateegiateks**.

Oletame, et mängija A kasutab puhtaid strateegiajaid $A_1, \ldots, A_m$.

Tema jaoks segastrateegia seisneb selles, et on teada nende strateegiate kasutamise sagedused

$$A_i \quad \text{kasutamise sagedus} \quad p_i \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$$

Järelikult mängija A segastrateegia määramiseks on vaja teada $m - 1$ arvu, sest

$$p_m = 1 - p_1 - p_2 - \ldots - p_{m-1}.$$

Oletame, et mängija B kasutab puhtaid strateegiajaid $B_1, \ldots, B_n$. Tema jaoks segastrateegia seisneb selles, et on teada nende strateegiate kasutamise sagedused

$$B_i \quad \text{kasutamise sagedus} \quad q_i \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1$$

Järelikult mängija B segastrateegia määramiseks on vaja teada $n - 1$ arvu, sest

$$q_n = 1 - q_1 - q_2 - \ldots - q_{n-1}.$$

Olgu mäng antud maatriksiga

A \ B	B_1	B_2	$\dots$	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}

Oletame, et mängija A poolt kasutatava segastrateegia $(p_1, p_2, \dots, p_m)$ kasutamisel on garanteeritud võit v.

See tähendab, et sõltumata mängija B poolt valitud strateegiast on mängu tulemuse keskväärtus alati mitte väiksem kui v.

Seega, kui mängija B kasutab strateegijat $B_j \ (j = 1, 2, \ldots, n)$, siis

$$\begin{array}{ll} B_1: & a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{m1}p_m \geqslant v \\ B_2: & a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{m2}p_m \geqslant v \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_n: & a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \ldots + a_{mn}p_m \geqslant v \\ & \\ & p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1 \end{array} \qquad (1)$$

Järelikult mängija A optimaalse segastrateegia leidmime taandub sellieste mittenegatiivsete arvude $p_1, p_2, \ldots, p_m$ ja suuruse v leidmisele, et oleks rahuldatud kitsenduste süsteem (1).

Siin muutuja v märk ei ole kitsendatud, kuid nõuame, et muutuja v väärtus peab olema maksimaalne.

Seega mängija A optimaalse segastrateegia leidmiseks tuleb lahendada LP.

Olgu mängija B garanteeritud võit (kaotus) segastrateegia $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ kasutamisel w. Seda sõltumata mängija A strateegija valikust. Seega peavad olema täidetud kitsendused

$$\begin{array}{ll} A_1: & a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \ldots + a_{1n}q_n \leqslant w \\ A_2: & a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \ldots + a_{2n}q_n \leqslant w \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_m: & a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \ldots + a_{mn}q_n \leqslant w \end{array} \tag{2}$$

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1$$

Siin optimaalse segastrateegiaja on selline, et w väärtus oleks võimalikult väike.

Need LP-d ei ole lahendamiseks sobiva kujuga, sest üks muutuja on märgi poolest kitsendamata.

Mängu olemus ei muutu, kui maatriksi elementidele juurde liita küllalt suur arv, mis teisendab kõik selle maatriksi elemendid mittenegatiivseteks.

Siis mängu alumine ja ülemine hind on samuti mittenegatiivsed.

Seega $a \leqslant v$, st garanteerituf võit ei saa olla väiksem alumisest hinnast.

Oletame, et mängu maatriks a_{ij} on sellisel kujul, et mängija A garanteeritud võit on positiivne. Võtame kasutusele uued muutujad

$$x_i = \frac{p_i}{v} \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Kasuatades neid muutujaid, saame LP (1) esitada kujul:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \frac{1}{v} = z_A \qquad \rightarrow \quad min \text{ (kuna soovime } v \text{ max)}$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m &\geqslant 1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m &\geqslant 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m &\geqslant 1 \end{aligned} \tag{3}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_m \geqslant 0$$

Lahendadaes selle ülesande saame, et mängija A garanteeritud võit on sihifunktsiooni optimaalse väärtuse pöördväärtus ja optimaalsed strateegiad on

$$p_i = x_i v \qquad x_i \quad \text{on optimaalne lahend}$$

Juhul, kui maatriksi elemente suurendasime C võrra, siis tuleb see lahutada sihifunktsiooni optimaalse väärtuse pöördväärtusest

$$v = \frac{1}{z} - C.$$

Mängija B segastrateegija leidmiseks:

$$y_j = \frac{q_j}{w} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

Tingimustest (2) saame

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \tfrac{1}{w} = z_B \qquad \rightarrow \quad max \text{ (kuna soovime } w \text{ min)}$$

$$\begin{array}{c} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \leqslant 1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \leqslant 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \leqslant 1 \end{array} \tag{4}$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_n \geqslant 0$$

Lineaarse planeerimise ülesanded (3) ja (4) on duaalsed ülesanded.