Transpordiülesanne

14. november 2016. a.

Ülesande püstitus

Olgu antud laod $L_1, L_2, \ldots, L_m$ ja tarbijad $T_1, T_2, \ldots, T_n$.

Tähistame:

- a_i laos L_i oleva kauba tagavara ($i = 1, 2, \ldots, m$);
- b_j tarbija T_j vajadused ($j = 1, 2, \ldots, n$).

Oletame, et kaupa on võimalik vedada mistahes laost L_i mistahes tarbijale T_j.

Tähistame c_{ij} veomarsruudile $L_i \to T_j$ vastava kaubaühiku vedamiseks tehtavad kulutused.

Seame ülesandeks koostada niisugune veoplaan, et kõikide tarbijate vajadused oleksid rahuldatud ja vedude kogukulu oleks minimaalne.

Seda ülesannet nimetatakse **transpordiülesandeks**.

Olgu x_{ij} marsruudil $L_i \to T_j$ veetava kauba kogus, siin $x_{ij} \geqslant 0$.

Transpordiülesande jaoks saame järgmised kitsendused;

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i$	Laost L_i ei saa rohkem kaupa välja vedada, kui seal tagavaraks on.
$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$	Tarbija T_j vajadused tuleb rahuldada.

Siin võrratust

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant b_j$$

ei ole mõtet lubada, sest tarbijale T_j üleliigse kauba vedamine suurendab kulutusi.

Kauba vedamisel tehtav kogukulu on

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} .$$

Transpordiülesannet saame vaadelda kui lineaarse planeerimise ülesannet:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \quad \to \quad \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i\,,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\,,$$

$$x_{ij} \geqslant 0.$$

Siin mn muutujat x_{ij} peavad rahuldama m-võrratusest ja n-võrrandist koosnevat kitsenduste süsteemi.

Majandusliku tähenduse tõttu $a_i > 0$, $b_j > 0$, $c_{ij} \geqslant 0$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \geqslant \sum_{j=1}^{n} b_j\,,$$

st ladudes on piisavalt kaupa kõikide tarbijate nõuete rahuldamiseks.

Valime muutujate x_{ij} väärtused järgmiselt:

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{a}, \qquad \text{kus} \qquad a = \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

Kitsendustest leiame, et

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{a} = \frac{b_j}{a} \sum_{i=1}^{m} a_i = b_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{a} = \frac{a_i}{a} \sum_{j=1}^{n} b_j \leqslant \frac{a_i}{a} \sum_{i=1}^{m} a_i = a_i$$

Järelikult sellisest valitud x_{ij} on transpordiülesande lubatavad lahendid, kuna kõik kitsendused on täidetud.

Kuna sihifunktsiooni väärtused saavad olla ainult mittenegatiivsed, st sihifunktsioon on lubatavate lahendite hulgal alt tõkestatud, jätelikult transporiülesandel leidub alati optimaalne lahend.

Kui kehtib range võrratus

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \,,$$

st ladudes on kaupa rohkem kui tarbijad vajavad.

$$x_{0i} = a_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots m) \quad \text{so ülejääk laos } L_i$$

Selle võrratuse saame muuta võrduseks, kui toome ülesandesse fiktiivse tarbija T_0 ja tema vajaduse

$$b_0 = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \,, \qquad \text{veokulud} \quad L_i \to T_0 \quad c_{i0} = 0.$$

Seega tarbija T_0 saab endale kõik ladudesse jäänud ülejäägid.

Kasutades fiktiivset tarbijat, võime transpordiülesande esitada kanoonilisel kujul

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \quad \to \quad \text{min}$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i ,$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j ,$$
$$x_{ij} \geqslant 0.$$

Siin eeldame, et on täidetud tingimus

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Sellist ülesannet nimetatakse kinniseks transpordiülesandeks.

Tõestada, et transpordiülesandel on $n + m - 1$ baasilahendit.