Duaalne simpleksmeetod

26. oktoober 2016. a.

Olgu LP antud kujul

$$z = b_0 - \sum_{j \in J} c_j x_j \quad \to \quad max$$
$$x_i + \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i \quad (i \in I).$$

Siin $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ ja $J = \{m+1, m+2, \ldots, n\}$.
Ülesandele vastav simplekstabel on:

	x_1	$\ldots$	x_k	$\ldots$	x_m	x_{m+1}	$\ldots$	x_l	$\ldots$	x_n
b_0	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0	c_{m+1}	$\ldots$	c_l	$\ldots$	c_n
b_1	1	$\ldots$	0	$\ldots$	0	$a_{1,m+1}$	$\ldots$	a_{1l}	$\ldots$	a_{1n}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
b_k	0	$\ldots$	1	$\ldots$	0	$a_{k,m+1}$	$\ldots$	a_{kl}	$\ldots$	a_{kn}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
b_m	0	$\ldots$	0	$\ldots$	1	$a_{m,m+1}$	$\ldots$	a_{ml}	$\ldots$	a_{mn}

Simplekstabelit nimetatakse **lubatavaks**, kui $b_i \geqslant 0 \quad (\forall i \in I)$.

Simplekstabelit nimetatakse **duaalselt lubatavaks**, kui $c_j \geqslant 0 \quad (\forall j \in J)$.

Duaalne lubatavus on täidetud nende LP ülesannete korral, milles nõutakse positiivsete kordajatega sihifunktsiooni minimeerimist tingimusel, et sihifunktsioon on avaldatud ainult baasiväliste muutujate kaudu. Seega

$$z = b_0 - \sum_{j \in J} c_j x_j \quad \to \quad min$$
$$x_i + \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i \quad (i \in I).$$

Kui duaalselt lubatav simplekstabel on ka lubatav, siis on simplekstabelist saadav baasilahend optimaalne, st

$$x_i = b_i \quad (i \in I), \qquad x_j = 0 \quad (j \in J).$$

Seega vastav LP on lahendatud.

Järelikult edaspidi pakub meile huvi juhtum, kus simplekstabel ei ole lubatav, st

$$\exists\, b_i < 0 \quad (i \in I).$$

Simplekstabelis uuele baasile üleminekul oli nõudeks tabeli lubatavuse säilitamine.

Duaalselt lubatava simplekstabeli korral püstitame uuele baasile üleminekul järgmised nõuded:

- simplekstabeli duaaalne lubatavus peab säilima;
- vähemalt üks vabaliikmete veeru (nullis veerg) elementidest peab asenduma positiivsega.

Kui uus tabel ei ole veel optimaalsel kujul, siis kordame baasiteisendust.

Oletame, et element $b_k < 0$, so valime juhtreka tabeli k-nda rea. Juhul, kui vabaliikmete veerus on mitu negatiivset elementi, siis valitakse juhtrida järgmiselt

- juhtreaks valitakse rida, milles $b_k < 0$ ja $\max_{k \in I} |b_k|$;
- kui selliseid ridu on rohkem kui üks, siis nende hulgast esimene.

Juhtveerg tuleb valida k-nda rea nende elementide hulgast, mille korral $a_{kl} < 0$.
Jagame valitud rea kõik elemendid arvuga a_{kl}. Järelikult k-ndas reas olev vabaliige muutub positiivseks, st

$$\bar{b}_k = \frac{b_k}{a_{kl}},$$

kuna tabelist valisime rea, kus $b_k < 0$.

Kui vabaliige $b_k < 0$ on juhtrea ainus negatiivne element, siis puuduvad üldse LP lubatavad lahendid. Valitud juhtreale vastab kitsendus

$$x_k + \sum_{j \in J} a_{kj} x_j = b_k \,,$$

milles $x_k \geqslant 0$ ja $a_{kj} \geqslant 0$ $(k \in I, \;\; j \in J)$. Siin tekib vastuolu, kuna kitsenduse vasak pool on mittenegatiivne ja parem pool on negatiivne. Juhtelement tuleb valida selliselt, et säiliks simplekstabeli duaalne lubatavus. Sihifunktsioonile vastava rea elemendid teisenevad järgmiselt:

$$\bar{c}_j = c_j - \frac{a_{kj}}{a_{kl}} c_l = c_j - \frac{c_l}{a_{kl}} a_{kj} \,.$$

Duaalse lubatavuse nõude $\bar{c}_j \geqslant 0$ tõttu saame

$$c_j - \frac{c_l}{a_{kl}} a_{kj} \geqslant 0.$$

Võrratus

$$c_j - \frac{c_l}{a_{kl}} a_{kj} \geqslant 0$$

kehtib alati indeksi j nende väärtuste korral kui $a_{kj} \geqslant 0$, sest duaalse lubatavuse ja eespool tehtud valiku tõttu kehtivad võrratused

$$c_l \geqslant 0 \qquad \text{ja} \qquad a_{kj} \leqslant 0.$$

Saame hinnangu

$$\bar{c}_j = c_j - \frac{c_l}{a_{kl}} a_{kj} \geqslant c_j \geqslant 0.$$

Kui $a_{kj} < 0$, siis nõudest $\bar{c}_j = c_j - \frac{c_l}{a_{kl}} a_{kj} \geqslant 0$, saame

$$\frac{c_j}{a_{kj}} \leqslant \frac{c_l}{a_{kl}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{c_j}{|a_{kj}|} \geqslant \frac{c_l}{|a_{kl}|}$$

Seega, pärast juhtrea $b_k < 0 \;\; (k \in I)$ fikseerimist, tuleb sellest valida element a_{kl} vastavalt tingimusele

$$\frac{c_l}{|a_{kl}|} = \min_{a_{kj}<0} \frac{c_j}{|a_{kj}|}$$

Juhtveeruks tuleb valida juhtrea negatiivsete elementide hulgast see, mille korral sihifunktsioonile vastava veeru elemendi jagatis juhtrea samas veerus paikneva elemendi absoluutväärtusega on minimaalne.

LP ülesande lahendusmeetodit, mille korral juhtrida ja juhtveerg valitakse kirjeldatud viisil, nimetatakse **duaalseks simpleksmeetodiks**.

Varem kirjeldatud simpleksmeetodit nimetatakse **primaarseks** või **otseseks simpleksmeetodiks**.

Uurime, kuidas muudab simplekssamm sihifunktsiooni väärtust. Teisendusvalemist leiame, et

$$\bar{b}_0 = b_0 - \frac{b_k}{a_{kl}} c_l \leqslant b_0,$$

kui $c_l \neq 0$ (siin $b_k < 0$ ja $a_{kl} < 0$). Kui $c_l = 0$, siis sihifunktsiooni väärtus ei muutu $\bar{b}_0 = b_0$.

Järelikult duaalse simpleksmeetodi korral sihifunktsiooni väärtus kahaneb monotoonselt.

Algülesandes nõutakse sihifunktsiooni maksimaalse väärtuse leidmist. Selline vastuolu on selgitatav asjaoluga, et duaalse simpleksmeetodi korral liigutakse optimaalse lahendi poole väljaspool lubatud lahendite hulka ja seal on sihifunktsiooni väärtus optimaalsest suurem.