Duaalsed lineaarsed planeerimisülesanded

October 21, 2016

Olgu LP antud kujul (1):

$$z = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \quad \to \quad max$$

$$A\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geqslant 0$$

Ülesandega (1) duaalseks ülesandeks nimetatakse lineaarset planeerimisülesannet (2)

$$w = \mathbf{b} \cdot \mathbf{y} \quad \to \quad min$$

$$A^T\mathbf{y} \geqslant \mathbf{c}$$

$$\mathbf{y} \geqslant 0.$$

Koordinaatkujul näevad need ülesanded välja järgmiselt:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \quad \to \quad max$$

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leqslant b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leqslant b_2 \\
\ldots \qquad\qquad & \quad \ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leqslant b_m
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0.$$

ja sellega duaalne ülesanne

$$w = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \quad \to \quad min$$

$$\begin{aligned}
a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m &\geqslant c_1 \\
a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m &\geqslant c_2 \\
\ldots \qquad\qquad & \quad \ldots \\
a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m &\geqslant c_n
\end{aligned}$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_m \geqslant 0.$$

Olgu lähteülesande üks kitsendustest antud võrradiga, näiteks viimane

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m.$$

Võrduse võime kirjutada välja nii

$$\begin{aligned} a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\geqslant b_m \quad | \cdot (-1) \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leqslant b_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leqslant b_m \\ -a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - \ldots - a_{mn}x_n &\leqslant -b_m \end{aligned}$$

Kitsenduste arv kasvas ühe võrra. Järelikult vastavas duaalses ülesandes on $(m+1)$-muutujat, so

$$y_1, y_2, \ldots, y_m, y_{m+1}.$$

Jäelikult duaalne ülesanne on kujul

$$
\begin{aligned}
w = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m - b_my_{m+1} \quad &\rightarrow \quad min \\
a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m - a_{m1}y_{m+1} \quad &\geqslant c_1 \\
a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m - a_{m2}y_{m+1} \quad &\geqslant c_2 \\
\ldots \quad &\ldots \\
a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m - a_{mn}y_{m+1} \quad &\geqslant c_n
\end{aligned}
$$

Tähistame siin $y_m - y_{m+1} = y'_m$, siis saame duaalse ülesande esialgsel kujul.

Siin uus muutuja y'_m ei pea enam olema postiivne.

Olgu LP antud kanoonilisel kujul:

$$z = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \quad \rightarrow \quad max$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geqslant 0$$

Siis selle ülesandega duaalne ülesanne on

$$w = \mathbf{b} \cdot \mathbf{y} \quad \rightarrow \quad min$$

$$A^T\mathbf{y} \geqslant \mathbf{c}$$

Teoreem (1)

Kui **x** *ja* **y** *on vastavalt ülesannete (1) ja (2) lubatavad lahendid, siis*

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \leqslant \mathbf{b} \cdot \mathbf{y}.$$

Tõestus. Tähistame

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Ülesanne (1):

$$\begin{aligned} z = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \equiv C^T X = X^T C \quad &\to max \\ AX \leqslant B & \end{aligned}$$

Ülesanne (2):

$$\begin{aligned} w = \mathbf{b} \cdot \mathbf{y} \equiv B^T Y = Y^T B \quad &\to min \\ A^T Y \geqslant C & \end{aligned}$$

Kasutame duaalse ülesande kitsendusi

$$X^T \cdot \mid \quad A^T Y \geqslant C$$

$$X^T A^T Y \geqslant X^T C \qquad \Rightarrow \qquad (AX)^T Y \geqslant X^T C$$

$$X^T C \leqslant (AX)^T Y \leqslant B^T Y \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} = X^T C \leqslant B^T Y = \mathbf{b} \cdot \mathbf{y}$$

sest $AX \leqslant B$. □

Teoreem (2)

Kui ülesande (1) ja (2) lubatavad lahendid $\mathbf{x}^*$ *ja* $\mathbf{y}^*$ *rahuldavad tingimust*

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}^* = \mathbf{b} \cdot \mathbf{y}^*,$$

siis $\mathbf{x}^*$ *ja* $\mathbf{y}^*$ *on nende ülesannete optimaalsed lahendid.*

Tõestus. Teoreemist (1) $\Rightarrow$ et iga ülesande (1) lubatava lahendi korral kehtib võrratus

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}^* \leqslant \mathbf{b} \cdot \mathbf{y}^*$$

Eelduse tõttu $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}^* = \mathbf{b} \cdot \mathbf{y}^* \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \leqslant \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}^* \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^*$ on ülesande (1) optimaalne lahend.

Ülesande (2) iga lubatava lahendi $\mathbf{y}$ korral

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}^* \leqslant \mathbf{b} \cdot \mathbf{y} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{y}^* \leqslant \mathbf{b} \cdot \mathbf{y} \quad \text{kehtib} \quad \forall \mathbf{y} \quad \text{korral}$$

Järelikult $\mathbf{y}^*$ on ülesande (2) optimaalne lahend. $\square$

Teoreem (3)

Kui ülesande (2) sihifunktsioon on lubatavate lahendite hulgal alt tõkestamata, siis ülesandel (1) ei ole lubatavaid lahendeid.
Kui ülesande (1) sihifunktsioon on lubatavate lahendite hulgal ülalt tõkestamata, siis ülesandel (2) ei ole lubatavaid lahendeid.

Tõestus. Eelduse kohaselt leidub ülesande (2) selline lubatavate lahendite jada $\{\mathbf{y}_k\}$ nii, et

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{b} \cdot \mathbf{y}_k = -\infty.$$

Oletame vastuväiteliselt, et ülesandel (1) leidub mingi lubatav lahend $\mathbf{x}_0$, et

$$const = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}_0 \leqslant \mathbf{b} \cdot \mathbf{y}_k \quad \forall k = 1, 2, \ldots \quad \text{korral, kui } k \to \infty$$

Tekkis vastuolu eeldusega, et ülesande (2) sihifunktsioon on alt tõkestamata.
Analoogiliselt tõestatakse teoreemi pool. $\square$

Teoreem (4)

Kui ühel duaalsetest ülesannetest on olemas optimaalne lahend, siis on see olemas ka teisel ülesandel, kusjuures mõlema ülesande sihifunktsioonide ekstremaalsed väärtused on võrdsed.

Teoreem (5)

Selleks, et ülesannete (1) ja (2) lubatavad lahendid $\mathbf{x}^*$ *ja* $\mathbf{y}^*$ *oleksid optimaalsed, on tarvilik ja piisav, et*

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}^* = \mathbf{b} \cdot \mathbf{y}^*.$$

Teoreem 5 järeldub vahetult teoreemidest 2 ja 4.

Teoreem (6)

Ülesannete (1) ja (2) lubatavad lahendid $\mathbf{x}^*$ *ja* $\mathbf{y}^*$ *on nende ülesannete optimaalsed lahendid parajasti siis, kui kehtivad võrdused:*

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i\Big)y_i^* = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* - c_j\Big)x_j^* = 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Tõestus. *Tarvilikkus*. Eeldame, et lahendid $\mathbf{x}^*$ ja $\mathbf{y}^*$ on optimaalsed.

Oletame vastuväiteliselt, et $\exists i = k$, mille korral esimene korrutis on nullist erinev, seega

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j^* < b_k \qquad \text{ja} \qquad y_k^* > 0 \qquad \text{optimaalsuse tõttu}$$

Ülejäänud indeksite korral kehtivad võrratused

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \leqslant b_i \qquad \text{ja} \qquad y_i^* \geqslant 0 \qquad i \in \{1, 2, \ldots, m\} \setminus \{k\}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \geqslant c_j \qquad \text{ja} \qquad x_j^* \geqslant 0 \qquad j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{y}^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* > \sum_{i=1}^{m} y_i^* \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i^* x_j^* =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j^* \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \geqslant \sum_{j=1}^{n} x_j^* c_j = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}^*$$

Järelikult $\mathbf{b} \cdot \mathbf{y}^* > \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}^*$. See on vastuolu optimaalsuse nõudega

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{y}^* = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}^*$$

Järelikult sellist indeksi $i = k$ väärtust ei saa olla.

Oletame, et need võrdused kehtivad, siis

$$\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i\Big)y_i^* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^*y_i^* - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^*y_i^* - \mathbf{b}\cdot\mathbf{y}^* = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* - c_j\Big)x_j^* = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^*x_j^* - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^*y_i^* - \mathbf{c}\cdot\mathbf{x}^* = 0$$

Lahutades viimasest võrdusest esimese, saame

$$-\mathbf{c}\cdot\mathbf{x}^* + \mathbf{b}\cdot\mathbf{y}^* = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{b}\cdot\mathbf{y}^* = \mathbf{c}\cdot\mathbf{x}^*.$$

$\square$