M-meetod

October 12, 2016

Olgu LP antud kujul (1):

$$z = b_0 - \sum_{j \in J} c_j x_j \quad \rightarrow \quad max$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i \quad (i \in I).$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0,$$

kus $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ ja $J = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Moodustame LP jaoks abiülesande (2):

$$w = b_0 - c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n - M(x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+m}) \quad \rightarrow \quad max$$

$$\begin{array}{lcccccl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & +x_{n+1} & & & & & = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & & +x_{n+2} & & & & = b_2 \\
\ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & & & & & +x_{n+m} & = b_m
\end{array}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m} \geqslant 0.$$

Siin M on küllalt suur positiivne arv.

Tähistame

$$\bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$$

$$\bar{\mathbf{c}} = (-c_1, -c_2, \ldots, -c_n, -M, \ldots, -M)$$

Olgu

$$\bar{\mathbf{x}}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, 0, \ldots, 0)$$

ülesande (2) mingi lubatav lahend, st

$$x_{n+1}^* = x_{n+2}^* = \ldots = x_{n+m}^* = 0.$$

Näeme, et see on ka esialgse ülesande (1) lubatav lahend.

Kui siin mingi $x_{n+i}^* \neq 0 \quad (i \in I))$, siis ülesande (1) kitsendustes vastav võrrand ei ole rahldatud ja selline lahend ei sobi ülesande (1) lubatavaks lahendiks.

Esialgsel ülesandel (1) ei pea alati lubatavaid lahendeid eksisteerima, kuid abiülesandel on need alati olemas. Näiteks, alati eksisteerib ühikvektoritest koosnev baas, millele vastav baasilahend on

$$\bar{\mathbf{x}}^* = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}, b_1, b_2, \ldots, b_m).$$

Sellele lahendile vastav sihifunktsiooni väärtus on
$w = -M(b_1 + b_2 + \ldots + b_m)$.

Teoreem 1. Kui abiülesande (2) optimaalne lahend on

$$\bar{\mathbf{x}}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m}).$$

siis $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ on ülesande (1) optimaalne lahend ja nende ülesannete sihifunktsioonide väärtused langevad kokku.
Eeldame, et $\bar{\mathbf{x}}^*$ on abiülesande optimaalne lahend, seega $\bar{\mathbf{x}}^*$ on ka lubatav lahend.

Oletame, et $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ ei ole ülesande (1) optimaalne lahend. Olgu ülesande (1) optimaalseks lahediks, st punktiks, mille korral sihifunktsioon z saavutab maksimaalse vääruse,

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

siis

$$\bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$$

on abiülesande lubatav lahend, st

$$\bar{\mathbf{c}} \cdot \bar{\mathbf{x}} = \underbrace{\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} > \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}^*} = \bar{\mathbf{c}} \cdot \bar{\mathbf{x}}^*$$

$$\overbrace{\bar{\mathbf{c}} \cdot \bar{\mathbf{x}} = \underbrace{\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} > \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}^*} = \bar{\mathbf{c}} \cdot \bar{\mathbf{x}}^*}^{\textit{max} \text{ ülesanne}}$$

Siin tekkis vastuolu asjaoluga, et $\bar{\mathbf{x}}^*$ on abiülesande optimaalne lahend.

$$z = b_0 - \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}^* = b_0 - c_1 x_1^* - c_2 x_2^* - \ldots - c_2 x_n^*$$

$$w = b_0 - \bar{\mathbf{c}} \cdot \bar{\mathbf{x}}^* = b_0 - c_1 x_1^* - c_2 x_2^* - \ldots - c_2 x_n^* - M \cdot 0 - \ldots M \cdot 0$$

Seega sihifunktsioonide väärtused langevad kokku.

Teoreem 2. Kui ülesanne (1) on lahenduv, siis leidub selline positiivne arv M_0, et iga $M \geqslant M_0$ korral on abiülesanne (2) lahenduv ja selle optimaalses lahendis

$$x_{n+1}^* = x_{n+2}^* = \ldots = x_{n+m}^* = 0.$$