Lubatava baasilahendi leidmine, kunstliku baasi meetod

October 5, 2016

Olgu LP antud kujul:

$$z = b_0 - \sum_{j \in J} c_j x_j \quad \to \quad max$$
$$x_i + \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i \quad (i \in I).$$
$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0,$$

kus $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ ja $J = \{m + 1, m + 2, \ldots, n\}$.

Siin maatriks A sisaldab alati m-järku ühikmaatriksit ja selle maatriksi astak on samuti m.

Niisugune eeldus ei ole alati täidetud ja seetõttu ei ole võimalik rakendada simpleksmeetodit.

Kui LP on antud üldisel kujul (1):

$$z = b_0 - \sum_{j \in J} c_j x_j \quad \to \quad max$$
$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i \quad (i \in I).$$
$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0,$$

kus $J = \{1, 2, \ldots, n\}$.
Siin kitsenduste maatriks A on kujul

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ühe võimaluse maatriksisse A vajaliku ühikmaatriksi saamiseks ja lubatava baasilahendi leidmiseks annab Gaussi meetod. Pärast seda on ülesande lahendamiseks võimalik kasutada simpleksmeetodit.

Gaussi meetod ei ole alati sobiv, sest leitud baasilahend võib osutada mittelubatavaks ja sellisel juhul simpleksmeetod ei ole rakendatav.

Püstitame järgmise ülesande, leida võrrandisüsteemi

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i \quad (i \in I),$$

selline mittenegatiivne lahend, mis muudab maksimaalesks funktsiooni

$$z = b_0 - \sum_{j \in J} c_j x_j .$$

Siin eeldame, et $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m) \geqslant 0$. Kui kitsenduste süsteemis leidub mõni negatiivse vabaliikmega võrrand, siis korrutame selle eelnevalt läbi arvuga -1.

Moosustame LP jaoks abiülesande (2):

$$w = x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+m} \quad \rightarrow \quad min$$

$$\begin{array}{lccccl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & +x_{n+1} & & & & = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & & +x_{n+2} & & & = b_2 \\
\ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & & & & +x_{n+m} & = b_m
\end{array}$$

Olgu Q esialgse ülesande (1) kõigi lubatavate lahendite hulk.

Teoreem. Kui ülesande (1) kõigi lubatavate lahendite hulk Q on mittetühi, siis abiülesandel (2) leidub optimaalne lahend ja see on kujul

$$\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m}).$$

Ülesande (1) lubatava baasilahendi leidmiseks tuleb toimida järgimiselt:

1. Lubatava baasilahendi $\mathbf{b} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, b_1, b_2, \ldots, b_m)$ korral lahendatakse abiülesanne (2); kui abiülesandel lahendid puuduvad, siis ei oma lahendeid ka esialgne ülesanne (1).
2. Kui abiülesandel on lahend

$$\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, x_{n+1}^*, x_{n+2}^*, \ldots, x_{n+m}^*),$$

   siis
   - juhul, kui $x_{n+1}^* = x_{n+2}^* = \ldots = x_{n+m}^* = 0$, siis

$$\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$$

     on esialgse ülesande lahend;
   - kui arvude $x_{n+1}^*, x_{n+2}^*, \ldots, x_{n+m}^*$ seas leidub nullist erinevaid, siis esialgne ülesanne ei oma lahendit.