Simpleksmeetod

September 28, 2016

Simpleksmeetod

Olgu LP esitatud **kanoonilisel kujul**:

$$\begin{aligned} z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \quad &\rightarrow \quad max \\ A\mathbf{x} = \mathbf{b}, & \\ \mathbf{x} \geqslant 0, & \end{aligned} .$$

Ülesandes esinevad kitsendused saame teisendada kujule

$$x_i + \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i \quad (i \in I),$$

kus x_i on baasimuutujad ja x_j on baasivälised muutujad.

LP sihifunktsiooni

$$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

avaldise saame alati teisendada sellisele kujule, et see ei sisalda baasimuutujaid, st kõigi baasimuutujate juures olevad kordajad on võrdsed nulliga

$$c_i = 0, \quad (i \in I).$$

Selleks on vajalik baasimuutujad asendada avalisetega

$$x_i = b_i - \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \quad (i \in I),$$

Järelikult sihifunktsioon võime kirjutada kujul

$$z = b_0 - \sum_{j \in J} a_{0j} x_j,$$

Järelikult sihifunktsioon võime kirjutada kujul

$$z = b_0 - \sum_{j \in J} a_{0j} x_j \,,$$

siin kordajad $b_0, \;\; a_{0j}$ avalduvad kordajate $c_i \;\; (i \in I)$ kaudu.

Seega oleme esialgse LP teisendanud kujule

$$\begin{aligned} z = b_0 - \sum_{j \in J} a_{0j} x_j \quad &\to \quad max \\ x_i + \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i \quad &(i \in I). \end{aligned}$$

Nendest valemitest saame baasile vastava erilahendi, kui kõigi baasiväliste muutujate väärtused võrdsustame nulliga, st $x_j = 0 \;\; (\forall j \in J)$. Järelikult baasile vastav lahend on

$$x_i = b_i \quad (i \in I) \qquad \text{ja} \qquad x_j = 0 \quad (j \in J).$$

Selle baasilahendi korral on sihifunktsiooni väärtus $z = b_0$.

Juhul, kui kõik $x_i = b_i \geqslant 0 \;\; (i \in I)$, siis on tegemist planeerimisülesande lubatava lahendiga.

Järgnevalt on vaja kontrollida leitud lubatava lahendi optimaalsust. Selleks vaatame sihifunktsiooni avaldist

$$z = b_0 - \sum_{j \in J} a_{0j} x_j \, .$$

Kui siin kõik kordajad $a_{0j} \geqslant 0 \;\; (\forall j \in J)$, siis mistahes lubatava lahendi $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0$ korral

$$z = b_0 - \sum_{j \in J} a_{0j} x_j \leqslant b_0 ,$$

st sihifunktsiooni väärtus ei ületa ühegi lubatava lahendi korral sihifunktsioon väärtust baasilahendi korral. See on lahendi optimaalsuse piisav tingimus.

Vaatleme juhtu, kui optimaalsuse tingimus ei ole täidetud, st sihifunktsiooni kordajate hulgas leidub negatiivseid kordajaid.

Olgu näiteks $a_{0l} < 0 \ \ (l \in J)$.

Kui nüüd leidub niisugune lubatav lahend, milles $x_l > 0$, kuid ülejäänud baasivälised koordinaadid

$$x_j = 0 \ \ (j \in J, j \neq l).$$

Siis saame sihifunktsiooni väärtuseks

$$z = b_0 - a_{0l}x_l > b_0,$$

millest järeldub, et sellise omadusega baasilahend ei ole optimaalne. Seega, lubatava baasilahendi optimaalsuse piisav tingimus on ka tarvilik.

Oletame, et optimaalsuse tingimus ei ole täidetud, st

$$\exists a_{0l} < 0 \quad (l \in J),$$

siis sihifunktsioonile suurema väärtuse saamiseks tuleb leida selline baasilahend, mille komponent $x_l > 0$, st x_l osutub uueks baasimuutujaks.

Sellise olukorra saavutamiseks tuleb muuta baaasi, st olemasolevalt baasilt tuleb minna üle uuele baasile. Uus baas erineb vanast baasist ainult ühe baasivektori poolest ja seda nimetatakse **naaberbaasiks**.

Üleminek naaberbaasile saab teostada järgmiselt. Fikseerime LP kitsenduste seas $k-$nda võrrandi

$$x_k + \sum_{j \in J} a_{kj} x_j = b_k \quad (k \in I),$$

millest avaldame muutuja x_l.

$$x_k + \sum_{j \in J \setminus \{l\}} a_{kj} x_j + a_{kl} x_l = b_k \quad (k \in I),$$

Siin kordaja $a_{kl} \neq 0$, sest vastasel korral muutuja x_l avaldamine ei oleks võimalik.

$$x_k + \sum_{j \in J \setminus \{l\}} a_{kj} x_j + a_{kl} x_l = b_k \quad (k \in I),$$

millest

$$x_l = \frac{b_k}{a_{kl}} - \frac{1}{a_{kl}} x_l - \sum_{j \in J \setminus \{l\}} \frac{a_{kj}}{a_{kl}} x_j$$

Tähistame

$$\bar{b}_l = \frac{b_k}{a_{kl}}, \quad \bar{a}_{lk} = \frac{1}{a_{kl}}, \quad \bar{a}_{lj} = \frac{a_{kj}}{a_{kl}}$$

Seega

$$x_l = \bar{b}_l + \sum_{j \in \bar{J}} \bar{a}_{lj} x_j \quad (\bar{J} = (J \cup \{k\}) \setminus \{l\}).$$

Avaldatud muutuja x_l avaldis võimaldab ellimineerida selle muutuja kõikidest kitsendustet ja sihifunktsioonist.

Tulemuseks saame LP kitsenduste süsteemi kujul

$$x_i + \sum_{j \in \bar{J}} \bar{a}_{ij} x_j = \bar{b}_k \quad (i \in I \setminus \{k\}),$$

Kõigi LP kitsenduste saamiseks tuleb viimastele lisada muutuja x_l avalisest saadav kitsendus, seega kogu kitsenduste süsteem teiseneb kujule

$$x_i + \sum_{j \in \bar{J}} \bar{a}_{ij} x_j = \bar{b}_i \quad (i \in \bar{I} = (I \cup \{l\}) \setminus \{k\}).$$

Selle süsteemi üldlahend on

$$x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in \bar{J}} \bar{a}_{ij} x_j \quad (i \in \bar{I}),$$

millele vastav uus baasilahend on

$$x_i = \bar{b}_i \quad (i \in \bar{I}) \qquad \text{ja} \qquad x_j = 0 \quad (j \in \bar{J}).$$

Seega oleme teostanud ülemineku naaberbaasile, endises kitsenduste süsteemis olevale k-ndale veerule vastava baasivektori oleme asendanud uue, l-indale veerule vastava baasivektoriga. Seda teisendust nimetatakse ellimineerimissammuks.

Oletame, et $I = \{1, 2, \ldots, m\}$, st esimesed m muutujat on baasimuutujad. Siis kitsenduste süsteem on kujul

$$
\begin{array}{cccccccc}
x_1 & & & + a_{1,m+1}x_{m+1} + & \ldots & +a_{1l}x_l + & \ldots & + a_{1n}x_n = b_1 \\
& x_2 & & + a_{2,m+1}x_{m+1} + & \ldots & +a_{2l}x_l + & \ldots & + a_{2n}x_n = b_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
& & x_m & + a_{m,m+1}x_{m+1} + & \ldots & +a_{ml}x_l + & \ldots & + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
$$

Koostame tabeli

	x_1	$\ldots$	x_k	$\ldots$	x_m	x_{m+1}	$\ldots$	x_l	$\ldots$	x_n
b_1	1	$\ldots$	0	$\ldots$	0	$a_{1,m+1}$	$\ldots$	$a_{1,l}$	$\ldots$	$a_{1,n}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
b_k	0	$\ldots$	1	$\ldots$	0	$a_{k,m+1}$	$\ldots$	$\boxed{a_{k,l}}$	$\ldots$	$a_{k,n}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
b_m	0	$\ldots$	0	$\ldots$	1	$a_{m,m+1}$	$\ldots$	$a_{m,l}$	$\ldots$	$a_{m,n}$

	x_1	$\dots$	x_k	$\dots$	x_m	x_{m+1}	$\dots$	x_l	$\dots$	x_n
b_1	1	$\dots$	0	$\dots$	0	$a_{1,m+1}$	$\dots$	$a_{1,l}$	$\dots$	$a_{1,n}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\frac{b_k}{a_{k,l}}$	0	$\dots$	$\frac{1}{a_{kl}}$	$\dots$	0	$\frac{a_{k,m+1}}{a_{kl}}$	$\dots$	$\boxed{1}$	$\dots$	$\frac{a_{k,n}}{a_{kl}}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
b_m	0	$\dots$	0	$\dots$	1	$a_{m,m+1}$	$\dots$	$a_{m,l}$	$\dots$	$a_{m,n}$

	x_1	$\dots$	x_k	$\dots$	x_m	x_{m+1}	$\dots$	x_l	$\dots$	x_n
$b_1 - \frac{b_k}{a_{kl}} a_{1l}$	1	$\dots$	$-\frac{1}{a_{kl}} a_{1l}$	$\dots$	0	$a_{1,m+1} - \frac{a_{k,m+1}}{a_{kl}} a_{1l}$	$\dots$	0	$\dots$	$a_{1n} - \frac{a_{kn}}{a_{kl}} a_{1l}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\frac{b_k}{a_{kl}}$	0	$\dots$	$\frac{1}{a_{kl}}$	$\dots$	0	$\frac{a_{k,m+1}}{a_{kl}}$	$\dots$	$\boxed{1}$	$\dots$	$\frac{a_{kn}}{a_{kl}}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$b_m - \frac{b_k}{a_{kl}} a_{ml}$	0	$\dots$	$-\frac{1}{a_{kl}} a_{ml}$	$\dots$	1	$a_{m,m+1} - \frac{a_{k,m+1}}{a_{kl}} a_{ml}$	$\dots$	0	$\dots$	$a_{m,n} - \frac{a_{kn}}{a_{kl}} a_{ml}$

	x_1	$\dots$	x_k	$\dots$	x_m	x_{m+1}	$\dots$	x_l	$\dots$	x_n
b_1	1	$\dots$	$\bar{a}_{1k}$	$\dots$	0	$\bar{a}_{1,m+1}$	$\dots$	0	$\dots$	$\bar{a}_{1n}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\bar{b}_k$	0	$\dots$	$\bar{a}_{kk}$	$\dots$	0	$\bar{a}_{k,m+1}$	$\dots$	1	$\dots$	$\bar{a}_{kn}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\bar{b}_m$	0	$\dots$	$\bar{a}_{mk}$	$\dots$	1	$\bar{a}_{m,m+1}$	$\dots$	0	$\dots$	$\bar{a}_{m,n}$

Planeerimisülesande lahendeid tuleb otsida võrrandisüsteemi mittenegatiivsete lahendite hulgast. Seetõttu pakuvad meile huvi võrrandisüsteemi (*) mittenegatiivsed baasilahendid. Eeldame, et süsteemi (*) baasilahend

$$\mathbf{x} = (\underbrace{b_1, \dots, b_k, \dots, b_m, 0, \dots, 0}_{n}) \geqslant 0$$

on mittenegatiivne. Ellimineerimissamm on on vaja teostada nii, et baasilahendi mittenegatiivsuse nõue oleks täidetud ka uue baasi korral, st

$$\bar{\mathbf{x}} = (\underbrace{\underbrace{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{k-1}, 0, \bar{b}_{k+1}, \dots, \bar{b}_m, 0, \dots, 0, \bar{b}_k}_{l}, 0, \dots, 0}_{n}) \geqslant 0$$

Vajalike tingimuste leidmiseks kirjutame välja vabaliikmete teisenemise valemid

$$\begin{aligned}\bar{b}_k &= \tfrac{b_k}{a_{kl}} \\ \bar{b}_i &= b_i - \tfrac{b_k}{a_{kl}} a_{il} = b_i - \tfrac{a_{il}}{a_{kl}} b_k \quad (\forall i \in I, \ \ i \neq k)\end{aligned}$$

Siin kordaja $b_k \geqslant 0$. Selleks, et kordaja $\bar{b}_k \geqslant 0$ oleks mittenegatiivne, peab olema täidetud tingimus $a_{kl} > 0$.

Järelikult, kui juhtveeruks on valitud l-is veerg, siis sealt tuleb juhtelemendiks valida positiivne element.

Kordaja b_i korral on kaks võimalust

1. Kui $a_{il} < 0$, siis nõue $\bar{b}_i \geqslant 0$ on täidetud, sest

$$\bar{b}_i = b_i - \frac{a_{il}}{a_{kl}} b_k \geqslant b_i \geqslant 0.$$

2. Kui $a_{il} > 0$, siis

$$\bar{b}_i = b_i - \frac{a_{il}}{a_{kl}} b_k \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b_i}{a_{il}} \geqslant \frac{b_k}{a_{kl}}.$$

Uue baailahendi $\bar{b}_i$ mittenegatiivsuse nõude tõttu peab see võrratus

$$\frac{b_i}{a_{il}} \geqslant \frac{b_k}{a_{kl}}$$

olema täidetud iga $\forall i$ korral, mille puhul $a_{il} > 0$. Seega saame tingimuse

$$\frac{b_k}{a_{kl}} = \min_{a_{il}>0} \frac{b_i}{a_{il}}.$$

Järelikult uue mittenegatiivse baasilahendi saamiseks tuleb toimida järgmiselt:

- juhtveeruks valida veerg, milles leidub positiivseid elemente;
- juhtelemendiks valida juhtveeru see positiivne element, mille korral vabaliikmete veerus oleva elemendi ja juhtveeru vastava positiivse elemendi jagatis on minimaalne (see määrab ära juhtrea).

Olgu LP antud kujul

$$z = b_0 - \sum_{j \in J} c_j x_j \quad \rightarrow \quad max$$
$$x_i + \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i \quad (i \in I).$$

Koostame tabeli

	x_1	$\dots$	x_k	$\dots$	x_m	x_{m+1}	$\dots$	x_l	$\dots$	x_n
b_0	0	$\dots$	0	$\dots$	0	c_{m+1}	$\dots$	c_l	$\dots$	c_n
b_1	1	$\dots$	0	$\dots$	0	$a_{1,m+1}$	$\dots$	a_{1l}	$\dots$	a_{1n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
b_k	0	$\dots$	1	$\dots$	0	$a_{k,m+1}$	$\dots$	a_{kl}	$\dots$	a_{kn}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
b_m	0	$\dots$	0	$\dots$	1	$a_{m,m+1}$	$\dots$	a_{ml}	$\dots$	a_{mn}