# Planeerimisülesande baasilahendid

September 18, 2016

# Ülesande püstitus

Olgu LP esitatud **kanoonilisel kujul**:

$$\begin{aligned} z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \quad &\rightarrow \quad max \\ A\mathbf{x} = \mathbf{b}&, \\ \mathbf{x} \geqslant 0&, \end{aligned}$$

mille lubatavate lahendite hulk on

$$Q = \{\, \mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b},\, \mathbf{x} \geqslant 0 \,\}.$$

Eeldame, et kitsenduste süsteemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{a_1} & \mathbf{a_2} & \dots & \mathbf{a_n} \end{pmatrix}$$

kus astak on $m$ $(m \leqslant n)$. See tähendab, et süsteemi kuuluvad võrrandid on lineaarselt sõltumatud ja kitsenduste võrrandisüsteem on lahenduv.

Suuremat huvi pakub juhtum $m < n$, sest siis on võrrandisüsteemil lõpmata palju lahendeid.

Kui $\text{rank}(A) = m$, siis leidub selle veeruvektorite hulgas $m$ lineaarselt sõltumatut vektorit, olgu nendeks

$$\mathbf{a_{i_1}}, \mathbf{a_{i_2}}, \dots, \mathbf{a_{i_m}}.$$

Eeldame, et kitsenduste süsteemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{a_1} & \mathbf{a_2} & \dots & \mathbf{a_n} \end{pmatrix}$$

kus astak on $m$ $(m \leqslant n)$. See tähendab, et süsteemi kuuluvad võrrandid on lineaarselt sõltumatud ja kitsenduste võrrandisüsteem on lahenduv.

Suuremat huvi pakub juhtum $m < n$, sest siis on võrrandisüsteemil lõpmata palju lahendeid.

Kui $\operatorname{rank}(A) = m$, siis leidub selle veeruvektorite hulgas $m$ lineaarselt sõltumatut vektorit, olgu nendeks

$$\mathbf{a_{i_1}}, \mathbf{a_{i_2}}, \dots, \mathbf{a_{i_m}}.$$

Eeldame, et kitsenduste süsteemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{a_1} & \mathbf{a_2} & \dots & \mathbf{a_n} \end{pmatrix}$$

kus astak on $m$ $(m \leqslant n)$. See tähendab, et süsteemi kuuluvad võrrandid on lineaarselt sõltumatud ja kitsenduste võrrandisüsteem on lahenduv.

Suuremat huvi pakub juhtum $m < n$, sest siis on võrrandisüsteemil lõpmata palju lahendeid.

Kui $\text{rank}(A) = m$, siis leidub selle veeruvektorite hulgas $m$ lineaarselt sõltumatut vektorit, olgu nendeks

$$\mathbf{a_{i_1}}, \mathbf{a_{i_2}}, \dots, \mathbf{a_{i_m}}.$$

Kui rank$(A) = m$, siis leidub selle veeruvektorite hulgas $m$ lineaarselt sõltumatut vektorit, olgu nendeks

$$\mathbf{a_{i_1}}, \mathbf{a_{i_2}}, \ldots, \mathbf{a_{i_m}}.$$

Nende vektorite lineaarse sõltumatuse tõttu saame neid vaadelda, kui eukleidilise ruumi $E_m$ baasi.

Tähistame baasiindeksite hulka sümboliga $I$ ja ülejäänud indekste hulka sümboliga $J$, st

$$I = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\} \quad \text{ja} \quad J = \{\, j \mid j \notin I \,\} = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus I.$$

Muutujat $x_i$, kus $i \in I$ nimetame **baasimuutujaks** ehk **põhimuutujaks**. Nende muutujate arv on võrdne maatriksi $A$ astakuga $m = \text{rank}(A)$.

Kui rank$(A) = m$, siis leidub selle veeruvektorite hulgas $m$ lineaarselt sõltumatut vektorit, olgu nendeks

$$\mathbf{a_{i_1}}, \mathbf{a_{i_2}}, \ldots, \mathbf{a_{i_m}}.$$

Nende vektorite lineaarse sõltumatuse tõttu saame neid vaadelda, kui eukleidilise ruumi $E_m$ baasi.

Tähistame baasiindeksite hulka sümboliga $I$ ja ülejäänud indekste hulka sümboliga $J$, st

$$I = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\} \quad \text{ja} \quad J = \{\, j \mid j \notin I \,\} = \{1, 2, \ldots, n\} \backslash I.$$

Muutujat $x_i$, kus $i \in I$ nimetame **baasimuutujaks** ehk **põhimuutujaks**. Nende muutujate arv on võrdne maatriksi $A$ astakuga $m = \text{rank}(A)$.

Kui $\operatorname{rank}(A) = m$, siis leidub selle veeruvektorite hulgas $m$ lineaarselt sõltumatut vektorit, olgu nendeks

$$\mathbf{a_{i_1}}, \mathbf{a_{i_2}}, \ldots, \mathbf{a_{i_m}}.$$

Nende vektorite lineaarse sõltumatuse tõttu saame neid vaadelda, kui eukleidilise ruumi $E_m$ baasi.

Tähistame baasiindeksite hulka sümboliga $I$ ja ülejäänud indekste hulka sümboliga $J$, st

$$I = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\} \quad \text{ja} \quad J = \{\, j \mid j \notin I \,\} = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus I.$$

Muutujat $x_i$, kus $i \in I$ nimetame **baasimuutujaks** ehk **põhimuutujaks**. Nende muutujate arv on võrdne maatriksi $A$ astakuga $m = \operatorname{rank}(A)$.

Muutujat $x_i$, kus $i \in J$ nimetame **baasiväliseks muutujaks** ehk **vabaks muutujaks.** Baasiväliste muutujate arv on $n - m$.

Maatriksi $A$ astakut määrava miinori saame alati teisendada diagonaalkujule, st kujule kus maatriks $A$ sisaldab $m$ ühikvektorit

$$\mathbf{e_i} = (\underbrace{0 \ \ldots \ 0 \ 1}_{i} \ 0 \ \ldots \ 0)^T \qquad i \in I = \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Nüüd kitsenduste süsteemi maatriks on kujul

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \ldots & \mathbf{e_m} & \mathbf{a_{m+1}} & \ldots & \mathbf{a_n} \end{pmatrix}$$

Järelikult saame võrrandisüsteemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ esitada kujul

$$x_i + \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i, \quad i \in I.$$

Muutujat $x_i$, kus $i \in J$ nimetame **baasiväliseks muutujaks** ehk **vabaks muutujaks.** Baasiväliste muutujate arv on $n - m$.

Maatriksi $A$ astakut määrava miinori saame alati teisendada diagonaalkujule, st kujule kus maatriks $A$ sisaldab $m$ ühikvektorit

$$\mathbf{e_i} = (\underbrace{0 \ \dots \ 0 \ 1}_{i} \ 0 \ \dots \ 0)^T \qquad i \in I = \{1, 2, \dots, m\}.$$

Nüüd kitsenduste süsteemi maatriks on kujul

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \dots & \mathbf{e_m} & \mathbf{a_{m+1}} & \dots & \mathbf{a_n} \end{pmatrix}$$

Järelikult saame võrrandisüsteemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ esitada kujul

$$x_i + \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i, \quad i \in I.$$

Muutujat $x_i$, kus $i \in J$ nimetame **baasiväliseks muutujaks** ehk **vabaks muutujaks.** Baasiväliste muutujate arv on $n - m$.

Maatriksi $A$ astakut määrava miinori saame alati teisendada diagonaalkujule, st kujule kus maatriks $A$ sisaldab $m$ ühikvektorit

$$\mathbf{e_i} = (\underbrace{0 \ \ldots \ 0 \ 1}_{i} \ 0 \ \ldots \ 0)^T \qquad i \in I = \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Nüüd kitsenduste süsteemi maatriks on kujul

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \ldots & \mathbf{e_m} & \mathbf{a_{m+1}} & \ldots & \mathbf{a_n} \end{pmatrix}$$

Järelikult saame võrrandisüsteemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ esitada kujul

$$x_i + \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i, \quad i \in I.$$

Muutujat $x_i$, kus $i \in J$ nimetame **baasiväliseks muutujaks** ehk **vabaks muutujaks.** Baasiväliste muutujate arv on $n - m$.

Maatriksi $A$ astakut määrava miinori saame alati teisendada diagonaalkujule, st kujule kus maatriks $A$ sisaldab $m$ ühikvektorit

$$\mathbf{e_i} = (\underbrace{0 \ \ldots \ 0 \ 1}_{i} \ 0 \ \ldots \ 0)^T \qquad i \in I = \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Nüüd kitsenduste süsteemi maatriks on kujul

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \ldots & \mathbf{e_m} & \mathbf{a_{m+1}} & \ldots & \mathbf{a_n} \end{pmatrix}$$

Järelikult saame võrrandisüsteemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ esitada kujul

$$x_i + \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i, \quad i \in I.$$

$$x_i + \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i, \quad i \in I.$$

Tähistame $b_i = a_{i0}$, saame viimase võrrandisüsteemi teisendada kujule

$$x_i = a_{i0} - \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i, \quad i \in I.$$

Seega kitsendustele vastav võrrandisüsteem on lahendatud baasimuutujate (põhimuutujate) suhtes.

Siin kõigi baasiväliste muutujate muutujate (vabade muutujate) väärtusi võime valida vabalt.

Võrrandisüsteemi lahendit, mis saadakse vabade muutujate komplekti fikseerimisel, nimetatakse **erilahendiks**.

$$x_i + \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i, \quad i \in I.$$

Tähistame $b_i = a_{i0}$, saame viimase võrrandisüsteemi teisendada kujule

$$x_i = a_{i0} - \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i, \quad i \in I.$$

Seega kitsendustele vastav võrrandisüsteem on lahendatud baasimuutujate (põhimuutujate) suhtes.

Siin kõigi baasiväliste muutujate muutujate (vabade muutujate) väärtusi võime valida vabalt.

Võrrandisüsteemi lahendit, mis saadakse vabade muutujate komplekti fikseerimisel, nimetatakse **erilahendiks**.

$$x_i + \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i, \quad i \in I.$$

Tähistame $b_i = a_{i0}$, saame viimase võrrandisüsteemi teisendada kujule

$$x_i = a_{i0} - \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i, \quad i \in I.$$

Seega kitsendustele vastav võrrandisüsteem on lahendatud baasimuutujate (põhimuutujate) suhtes.

Siin kõigi baasiväliste muutujate muutujate (vabade muutujate) väärtusi võime valida vabalt.

Võrrandisüsteemi lahendit, mis saadakse vabade muutujate komplekti fikseerimisel, nimetatakse **erilahendiks**.

$$x_i = a_{i0} - \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i, \quad i \in I.$$

Kui valime vabade muutujate komplekti selliselt, nende kõik väärtused on nullid, siis vastavat erilahendit nimetatakse planeerimisülesande **baasilahendiks**.

Seega baasilahendi $\mathbf{x}^0$ komponendid ehk koordinaadid

$$x_i^0 = a_{i0} \quad (i \in I), \qquad x_j^0 = 0 \quad (j \in J).$$

Koordinaate $x_i^0 = a_{i0} \quad (i \in I)$ nimetatakse baasilahendi $\mathbf{x}^0$ **baasikoordinaatideks.**

Koordinaate $x_j^0 = 0 \quad (j \in J)$ nimetatakse baaislahendi $\mathbf{x}^0$ **baasivälisteks koordinaatideks.**

$$x_i = a_{i0} - \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i, \quad i \in I.$$

Kui valime vabade muutujate komplekti selliselt, nende kõik väärtused on nullid, siis vastavat erilahendit nimetatakse planeerimisülesande **baasilahendiks**.

Seega baasilahendi $\mathbf{x}^0$ komponendid ehk koordinaadid

$$x_i^0 = a_{i0} \quad (i \in I), \qquad x_j^0 = 0 \quad (j \in J).$$

Koordinaate $x_i^0 = a_{i0} \quad (i \in I)$ nimetatakse baasilahendi $\mathbf{x}^0$ **baasikoordinaatideks.**

Koordinaate $x_j^0 = 0 \quad (j \in J)$ nimetatakse baaislahendi $\mathbf{x}^0$ **baasivälisteks koordinaatideks.**

$$x_i = a_{i0} - \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i, \quad i \in I.$$

Kui valime vabade muutujate komplekti selliselt, nende kõik väärtused on nullid, siis vastavat erilahendit nimetatakse planeerimisülesande **baasilahendiks.**

Seega baasilahendi $\mathbf{x}^0$ komponendid ehk koordinaadid

$$x_i^0 = a_{i0} \quad (i \in I), \qquad x_j^0 = 0 \quad (j \in J).$$

Koordinaate $x_i^0 = a_{i0} \quad (i \in I)$ nimetatakse baasilahendi $\mathbf{x}^0$ **baasikoordinaatideks.**

Koordinaate $x_j^0 = 0 \quad (j \in J)$ nimetatakse baaislahendi $\mathbf{x}^0$ **baasivälisteks koordinaatideks.**

$$x_i = a_{i0} - \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i, \quad i \in I.$$

Kui valime vabade muutujate komplekti selliselt, nende kõik väärtused on nullid, siis vastavat erilahendit nimetatakse planeerimisülesande **baasilahendiks.**

Seega baasilahendi $\mathbf{x}^0$ komponendid ehk koordinaadid

$$x_i^0 = a_{i0} \quad (i \in I), \qquad x_j^0 = 0 \quad (j \in J).$$

Koordinaate $x_i^0 = a_{i0} \quad (i \in I)$ nimetatakse baasilahendi $\mathbf{x}^0$ **baasikoordinaatideks.**

Koordinaate $x_j^0 = 0 \quad (j \in J)$ nimetatakse baaislahendi $\mathbf{x}^0$ **baasivälisteks koordinaatideks.**

Baasilahendit, mille kõik komponendid on nullist erinevad, nimetatakse **regulaarseks** ehk **mittekidunud baasilahendiks**, st

$$x_i^0 = a_{i0} \neq 0, \quad \forall i \in I.$$

Baasilahendit, mille komponentide hulgas leidub nulle, nimetatakse **kidunud baasilahendiks**, st

$$\exists i \in I \quad x_i^0 = a_{i0} = 0.$$

Järelikult regulaarse baasilahendi mullist erinevate komponentide arv on $m = \mathrm{rank}(A)$.

Baasilahend $\mathbf{x}^0$ on planeerimisülesande lubatud lahend, kui

$$x_i^0 = a_{i0} \geqslant 0 \quad \forall i \in I.$$

Baasilahendit, mille kõik komponendid on nullist erinevad, nimetatakse **regulaarseks** ehk **mittekidunud baasilahendiks**, st

$$x_i^0 = a_{i0} \neq 0, \quad \forall i \in I.$$

Baasilahendit, mille komponentide hulgas leidub nulle, nimetatakse **kidunud baasilahendiks**, st

$$\exists i \in I \quad x_i^0 = a_{i0} = 0.$$

Järelikult regulaarse baasilahendi mullist erinevate komponentide arv on $m = \text{rank}(A)$.

Baasilahend $\mathbf{x}^0$ on planeerimisülesande lubatud lahend, kui

$$x_i^0 = a_{i0} \geqslant 0 \quad \forall i \in I.$$

Baasilahendit, mille kõik komponendid on nullist erinevad, nimetatakse **regulaarseks** ehk **mittekidunud baasilahendiks**, st

$$x_i^0 = a_{i0} \neq 0, \quad \forall i \in I.$$

Baasilahendit, mille komponentide hulgas leidub nulle, nimetatakse **kidunud baasilahendiks**, st

$$\exists i \in I \quad x_i^0 = a_{i0} = 0.$$

Järelikult regulaarse baasilahendi mullist erinevate komponentide arv on $m = \text{rank}(A)$.

Baasilahend $\mathbf{x}^0$ on planeerimisülesande lubatud lahend, kui

$$x_i^0 = a_{i0} \geqslant 0 \quad \forall i \in I.$$

Baasilahendit, mille kõik komponendid on nullist erinevad, nimetatakse **regulaarseks** ehk **mittekidunud baasilahendiks**, st

$$x_i^0 = a_{i0} \neq 0, \quad \forall i \in I.$$

Baasilahendit, mille komponentide hulgas leidub nulle, nimetatakse **kidunud baasilahendiks**, st

$$\exists i \in I \quad x_i^0 = a_{i0} = 0.$$

Järelikult regulaarse baasilahendi mullist erinevate komponentide arv on $m = \mathrm{rank}(A)$.

Baasilahend $\mathbf{x}^0$ on planeerimisülesande lubatud lahend, kui

$$x_i^0 = a_{i0} \geqslant 0 \quad \forall i \in I.$$

## Teoreem (1)

*Kui lineaarne võrrandisüsteem on lahenduv, siis leidub sellel vähemalt üks baasilahend.*

**Tõestus.**

Kasutades Gaussi meetodit, saame võrrandisüsteemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, süsteemimaatriksi $A$ veergude hulgast alati valida $m$ lineaarselt sõltumatut veeruvektorit ja lugeda need baasivektoriteks.

Anname $n - m$ baasivälisele ehk vabale muutujale väärtuse null. Siis saame $m$ baasimuutujast koosneva lineaarse võrrandisüsteemi, mille süsteemimaatriks on regulaarne ja selle võrrandisüsteemi lahend on määratud üheselt.

Selle süsteemi lahend koos baasiväliste muutujate väärtusega 0 annab võrrandisüsteemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lahendi, mis on definitsiooni järgi baasilahend.

$\square$

## Teoreem (1)

*Kui lineaarne võrrandisüsteem on lahenduv, siis leidub sellel vähemalt üks baasilahend.*

## Tõestus.

Kasutades Gaussi meetodit, saame võrrandisüsteemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, süsteemimaatriksi $A$ veergude hulgast alati valida $m$ lineaarselt sõltumatut veeruvektorit ja lugeda need baasivektoriteks.

Anname $n - m$ baasivälisele ehk vabale muutujale väärtuse null. Siis saame $m$ baasimuutujast koosneva lineaarse võrrandisüsteemi, mille süsteemimaatriks on regulaarne ja selle võrrandisüsteemi lahend on määratud üheselt.

Selle süsteemi lahend koos baasiväliste muutujate väärtusega 0 annab võrrandisüsteemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lahendi, mis on definitsiooni järgi baasilahend.

$\square$

## Teoreem (1)

*Kui lineaarne võrrandisüsteem on lahenduv, siis leidub sellel vähemalt üks baasilahend.*

## Tõestus.

Kasutades Gaussi meetodit, saame võrrandisüsteemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, süsteemimaatriksi $A$ veergude hulgast alati valida $m$ lineaarselt sõltumatut veeruvektorit ja lugeda need baasivektoriteks.

Anname $n - m$ baasivälisele ehk vabale muutujale väärtuse null. Siis saame $m$ baasimuutujast koosneva lineaarse võrrandisüsteemi, mille süsteemimaatriks on regulaarne ja selle võrrandisüsteemi lahend on määratud üheselt.

Selle süsteemi lahend koos baasiväliste muutujate väärtusega 0 annab võrrandisüsteemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lahendi, mis on definitsiooni järgi baasilahend.

□

## Teoreem (1)

*Kui lineaarne võrrandisüsteem on lahenduv, siis leidub sellel vähemalt üks baasilahend.*

## Tõestus.

Kasutades Gaussi meetodit, saame võrrandisüsteemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, süsteemimaatriksi $A$ veergude hulgast alati valida $m$ lineaarselt sõltumatut veeruvektorit ja lugeda need baasivektoriteks.

Anname $n - m$ baasivälisele ehk vabale muutujale väärtuse null. Siis saame $m$ baasimuutujast koosneva lineaarse võrrandisüsteemi, mille süsteemimaatriks on regulaarne ja selle võrrandisüsteemi lahend on määratud üheselt.

Selle süsteemi lahend koos baasiväliste muutujate väärtusega 0 annab võrrandisüsteemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lahendi, mis on definitsiooni järgi baasilahend.

□

## Teoreem (2)

*Kui planeerimisülesandel leidub lubatav lahend, siis on tal olemas ka lubatav baasilahend.*

Järgnevat selgitame baasilahendi geomeetrilist olemust.

Kumera **hulga tipuks** nimetatakse selle hulga iga sellist punkti, mis ei ole ühegi täielikult sinna hulka kuuluva lõigu sisepunktiks, st

$$\mathbf{x} \in X \quad \text{on hulga tipp}$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{kui teda ei ole võimalik esitada kujul}$$

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2$$

ühegi $\mathbf{x}_1 \in X$ ja $\mathbf{x}_2 \in X \quad (\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2)$ ning $0 < \lambda < 1$ korral.

## Teoreem (2)

*Kui planeerimisülesandel leidub lubatav lahend, siis on tal olemas ka lubatav baasilahend.*

Järgnevat selgitame baasilahendi geomeetrilist olemust.

Kumera **hulga tipuks** nimetatakse selle hulga iga sellist punkti, mis ei ole ühegi täielikult sinna hulka kuuluva lõigu sisepunktiks, st

$$\mathbf{x} \in X \quad \text{on hulga tipp}$$

$$\Updownarrow$$

kui teda ei ole võimalik esitada kujul

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2$$

ühegi $\mathbf{x}_1 \in X$ ja $\mathbf{x}_2 \in X \quad (\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2)$ ning $0 < \lambda < 1$ korral.

## Teoreem (2)

*Kui planeerimisülesandel leidub lubatav lahend, siis on tal olemas ka lubatav baasilahend.*

Järgnevat selgitame baasilahendi geomeetrilist olemust.

Kumera **hulga tipuks** nimetatakse selle hulga iga sellist punkti, mis ei ole ühegi täielikult sinna hulka kuuluva lõigu sisepunktiks, st

$$\mathbf{x} \in X \quad \text{on hulga tipp}$$

$$\Updownarrow$$

kui teda ei ole võimalik esitada kujul

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2$$

ühegi $\mathbf{x}_1 \in X$ ja $\mathbf{x}_2 \in X \quad (\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2)$ ning $0 < \lambda < 1$ korral.

## Teoreem (3)

*Planeerimisülesande*

$$\begin{aligned} z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \quad &\rightarrow \quad max \\ A\mathbf{x} = \mathbf{b}, & \\ \mathbf{x} \geqslant 0, & \end{aligned}$$

*iga lubatav baasilahend on selle ülesande lubatava lahendite hulga*

$$Q = \{ \mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqslant 0 \}.$$

*tipp ja vastupidi: lubatava hulga Q tipp on planeerimisülesande baasilahend.*

Tõestus.

Eeldame, et $\mathbf{x} = (x_1 \;\; x_2 \;\; \ldots \;\; x_n)^T$ on lubatav baasilahend ja tõestame, et ta on hulga $Q$ tipp.

Vastavalt baasilahendi definitsioonile

$$x_i \geqslant 0 \quad (i \in I) \qquad \text{ja} \qquad x_i = 0 \quad (i \neq I).$$

Seega $\mathbf{x} \geqslant 0$ ja

$$A\mathbf{x} \equiv \sum_{i \in I} x_i \mathbf{a}_i = \mathbf{b}.$$

Oletame väite vastaselt, et $\mathbf{x}$ ei ole hulga $Q$ tipp. Sellisel juhul leiduvad teineteisest erinevad lubatud lahendid $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}''$ ning reaalarv $\lambda \in (0, 1)$ selliselt, et

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}' + (1 - \lambda)\mathbf{x}''$$

**Tõestus.**

Eeldame, et $\mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n)^T$ on lubatav baasilahend ja tõestame, et ta on hulga $Q$ tipp.

Vastavalt baasilahendi definitsioonile

$$x_i \geqslant 0 \quad (i \in I) \qquad \text{ja} \qquad x_i = 0 \quad (i \neq I).$$

Seega $\mathbf{x} \geqslant 0$ ja

$$A\mathbf{x} \equiv \sum_{i \in I} x_i \mathbf{a}_i = \mathbf{b}.$$

Oletame väite vastaselt, et $\mathbf{x}$ ei ole hulga $Q$ tipp. Sellisel juhul leiduvad teineteisest erinevad lubatud lahendid $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}''$ ning reaalarv $\lambda \in (0, 1)$ selliselt, et

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}' + (1 - \lambda)\mathbf{x}''$$

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}' + (1-\lambda)\mathbf{x}''$$

ehk koordinaatkujul

$$x_i = \lambda x_i' + (1-\lambda)x_i'' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Siin $\lambda > 0, \;\; 1-\lambda > 0, \;\; x_i \geqslant 0, \;\; x_i' \geqslant 0, \;\; x_i'' \geqslant 0.$

Baasilahendi korral vabad muutujad $x_i = 0$ ($i \notin I$). Järelikult

$$x_i' = x_i'' = 0 \qquad (i \notin I).$$

Seega $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ ja $\mathbf{x}''$ on kõik ühele ja samale baasile vastavad lubatavad baasilahendid ning järelikult

$$\sum_{i\in I} x_i'\mathbf{a}_i = \mathbf{b} \qquad \text{ja} \qquad \sum_{i\in I} x_i''\mathbf{a}_i = \mathbf{b}.$$

Lahutame esimesest võrdusest teise

$$\sum_{i\in I} (x_i' - x_i'')\mathbf{a}_i = \mathbf{0}.$$

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}' + (1-\lambda)\mathbf{x}''$$

ehk koordinaatkujul

$$x_i = \lambda x_i' + (1-\lambda)x_i'' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Siin $\lambda > 0, \;\; 1-\lambda > 0, \;\; x_i \geqslant 0, \;\; x_i' \geqslant 0, \;\; x_i'' \geqslant 0$.

Baasilahendi korral vabad muutujad $x_i = 0$ ($i \notin I$). Järelikult

$$x_i' = x_i'' = 0 \qquad (i \notin I).$$

Seega **x**, $\mathbf{x}'$ ja $\mathbf{x}''$ on kõik ühele ja samale baasile vastavad lubatavad baasilahendid ning järelikult

$$\sum_{i \in I} x_i'\mathbf{a}_i = \mathbf{b} \qquad \text{ja} \qquad \sum_{i \in I} x_i''\mathbf{a}_i = \mathbf{b}.$$

Lahutame esimesest võrdusest teise

$$\sum_{i \in I}(x_i' - x_i'')\mathbf{a}_i = \mathbf{0}.$$

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}' + (1-\lambda)\mathbf{x}''$$

ehk koordinaatkujul

$$x_i = \lambda x_i' + (1-\lambda) x_i'' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Siin $\lambda > 0$, $1-\lambda > 0$, $x_i \geqslant 0$, $x_i' \geqslant 0$, $x_i'' \geqslant 0$.

Baasilahendi korral vabad muutujad $x_i = 0$ $(i \notin I)$. Järelikult

$$x_i' = x_i'' = 0 \qquad (i \notin I).$$

Seega $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ ja $\mathbf{x}''$ on kõik ühele ja samale baasile vastavad lubatavad baasilahendid ning järelikult

$$\sum_{i \in I} x_i' \mathbf{a}_i = \mathbf{b} \qquad \text{ja} \qquad \sum_{i \in I} x_i'' \mathbf{a}_i = \mathbf{b}.$$

Lahutame esimesest võrdusest teise

$$\sum_{i \in I} (x_i' - x_i'') \mathbf{a}_i = \mathbf{0}.$$

$$\sum_{i \in I} (x_i' - x_i'')\mathbf{a}_i = \mathbf{0}.$$

Kuna $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}''$ , siis $\exists i \in I$, mille korral $x_i' - x_i'' \neq 0$.

Saadud tulemus on vastuolus baasivektorite $\mathbf{a}_i$ lineaarse sõltumatuse nõudega.

Järelikult $\mathbf{x}$ on hulga $Q$ tipp. Tarvilikkus on tõestatud.

Piisavus.
Oletame vastupidi, st olgu $\mathbf{x}$ lubatavate lahendite hulga $Q$ tipp ja tõestame, et $\mathbf{x}$ on siis lubatav baasilahend.

Tähistame sümboliga $I^+$ tipu $\mathbf{x} = (x_1 \;\; x_2 \;\; \dots \;\; x_n)^T$ positiivsete koordinaatidega indeksite hulka, st

$$I^+ = \{\, i \mid x_i > 0 \,\}.$$

$$\sum_{i \in I} (x_i' - x_i'')\mathbf{a}_i = \mathbf{0}.$$

Kuna $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}''$ , siis $\exists i \in I$, mille korral $x_i' - x_i'' \neq 0$.

Saadud tulemus on vastuolus baasivektorite $\mathbf{a}_i$ lineaarse sõltumatuse nõudega.

Järelikult $\mathbf{x}$ on hulga $Q$ tipp. Tarvilikkus on tõestatud.

Piisavus.
Oletame vastupidi, st olgu $\mathbf{x}$ lubatavate lahendite hulga $Q$ tipp ja tõestame, et $\mathbf{x}$ on siis lubatav baasilahend.

Tähistame sümboliga $I^+$ tipu $\mathbf{x} = (x_1 \;\; x_2 \;\; \ldots \;\; x_n)^T$ positiivsete koordinaatidega indeksite hulka, st

$$I^+ = \{\, i \mid x_i > 0 \,\}.$$

$$\sum_{i \in I} (x_i' - x_i'')\mathbf{a}_i = \mathbf{0}.$$

Kuna $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}''$ , siis $\exists i \in I$, mille korral $x_i' - x_i'' \neq 0$.

Saadud tulemus on vastuolus baasivektorite $\mathbf{a}_i$ lineaarse sõltumatuse nõudega.

Järelikult $\mathbf{x}$ on hulga $Q$ tipp. Tarvilikkus on tõestatud.

Piisavus.
Oletame vastupidi, st olgu $\mathbf{x}$ lubatavate lahendite hulga $Q$ tipp ja tõestame, et $\mathbf{x}$ on siis lubatav baasilahend.

Tähistame sümboliga $I^+$ tipu $\mathbf{x} = (x_1 \; x_2 \; \dots \; x_n)^T$ positiivsete koordinaatidega indeksite hulka, st

$$I^+ = \{ \, i \mid x_i > 0 \, \}.$$

$$\sum_{i \in I} (x_i' - x_i'')\mathbf{a}_i = \mathbf{0}.$$

Kuna $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}''$ , siis $\exists i \in I$, mille korral $x_i' - x_i'' \neq 0$.

Saadud tulemus on vastuolus baasivektorite $\mathbf{a}_i$ lineaarse sõltumatuse nõudega.

Järelikult $\mathbf{x}$ on hulga $Q$ tipp. Tarvilikkus on tõestatud.

Piisavus.
Oletame vastupidi, st olgu $\mathbf{x}$ lubatavate lahendite hulga $Q$ tipp ja tõestame, et $\mathbf{x}$ on siis lubatav baasilahend.

Tähistame sümboliga $I^+$ tipu $\mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n)^T$ positiivsete koordinaatidega indeksite hulka, st

$$I^+ = \{\, i \mid x_i > 0 \,\}.$$

$$\sum_{i \in I} (x_i' - x_i'')\mathbf{a}_i = \mathbf{0}.$$

Kuna $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}''$ , siis $\exists i \in I$, mille korral $x_i' - x_i'' \neq 0$.

Saadud tulemus on vastuolus baasivektorite $\mathbf{a}_i$ lineaarse sõltumatuse nõudega.

Järelikult $\mathbf{x}$ on hulga $Q$ tipp. Tarvilikkus on tõestatud.

**Piisavus.**
Oletame vastupidi, st olgu $\mathbf{x}$ lubatavate lahendite hulga $Q$ tipp ja tõestame, et $\mathbf{x}$ on siis lubatav baasilahend.

Tähistame sümboliga $I^+$ tipu $\mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n)^T$ positiivsete koordinaatidega indeksite hulka, st

$$I^+ = \{\, i \mid x_i > 0 \,\}.$$

Kuna $x \in Q$, siis $\mathbf{x} \geqslant 0$ ja

$$A\mathbf{x} \equiv \sum_{i \in I} x_i \mathbf{a}_i = \sum_{i \in I^+} x_i \mathbf{a}_i = \mathbf{b}.$$

Näitame, et vektorid $\mathbf{a}_i$, kus $i \in I^+$, on lineaarselt sõltumatud.

Oletame vastupidist, et need vektorid on lineaarselt sõltuvad.

Seega leiduvad kordajad $d_i \quad (i \in I^+)$, mis kõik korraga ei ole nullid, nii et

$$\sum_{i \in I^+} d_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$$

Liidame $\lambda$ kordse viimase avaldise eelviimasega

$$\sum_{i \in I^+} (x_i + \lambda d_i)\mathbf{a}_i = \mathbf{b}.$$

Kuna $x \in Q$, siis $\mathbf{x} \geqslant 0$ ja

$$A\mathbf{x} \equiv \sum_{i \in I} x_i \mathbf{a}_i = \sum_{i \in I^+} x_i \mathbf{a}_i = \mathbf{b}.$$

Näitame, et vektorid $\mathbf{a}_i$, kus $i \in I^+$, on lineaarselt sõltumatud.

Oletame vastupidist, et need vektorid on lineaarselt sõltuvad.

Seega leiduvad kordajad $d_i \quad (i \in I^+)$, mis kõik korraga ei ole nullid, nii et

$$\sum_{i \in I^+} d_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$$

Liidame $\lambda$ kordse viimase avaldise eelviimasega

$$\sum_{i \in I^+} (x_i + \lambda d_i) \mathbf{a}_i = \mathbf{b}.$$

Kuna $x \in Q$, siis $\mathbf{x} \geqslant 0$ ja

$$A\mathbf{x} \equiv \sum_{i \in I} x_i \mathbf{a}_i = \sum_{i \in I^+} x_i \mathbf{a}_i = \mathbf{b}.$$

Näitame, et vektorid $\mathbf{a}_i$, kus $i \in I^+$, on lineaarselt sõltumatud.

Oletame vastupidist, et need vektorid on lineaarselt sõltuvad.

Seega leiduvad kordajad $d_i \quad (i \in I^+)$, mis kõik korraga ei ole nullid, nii et

$$\sum_{i \in I^+} d_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$$

Liidame $\lambda$ kordse viimase avaldise eelviimasega

$$\sum_{i \in I^+} (x_i + \lambda d_i) \mathbf{a}_i = \mathbf{b}.$$

Kuna $x \in Q$, siis $\mathbf{x} \geqslant 0$ ja

$$A\mathbf{x} \equiv \sum_{i \in I} x_i \mathbf{a}_i = \sum_{i \in I^+} x_i \mathbf{a}_i = \mathbf{b}.$$

Näitame, et vektorid $\mathbf{a}_i$, kus $i \in I^+$, on lineaarselt sõltumatud.

Oletame vastupidist, et need vektorid on lineaarselt sõltuvad.

Seega leiduvad kordajad $d_i \quad (i \in I^+)$, mis kõik korraga ei ole nullid, nii et

$$\sum_{i \in I^+} d_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$$

Liidame $\lambda$ kordse viimase avaldise eelviimasega

$$\sum_{i \in I^+} (x_i + \lambda d_i) \mathbf{a}_i = \mathbf{b}.$$

Kuna $x \in Q$, siis $\mathbf{x} \geqslant 0$ ja

$$A\mathbf{x} \equiv \sum_{i \in I} x_i \mathbf{a}_i = \sum_{i \in I^+} x_i \mathbf{a}_i = \mathbf{b}.$$

Näitame, et vektorid $\mathbf{a}_i$, kus $i \in I^+$, on lineaarselt sõltumatud.

Oletame vastupidist, et need vektorid on lineaarselt sõltuvad.

Seega leiduvad kordajad $d_i \quad (i \in I^+)$, mis kõik korraga ei ole nullid, nii et

$$\sum_{i \in I^+} d_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$$

Liidame $\lambda$ kordse viimase avaldise eelviimasega

$$\sum_{i \in I^+} (x_i + \lambda d_i) \mathbf{a}_i = \mathbf{b}.$$

$$\sum_{i \in I^+} (x_i + \lambda d_i)\mathbf{a}_i = \mathbf{b}.$$

Seega vektor $\mathbf{x}^*$ koordinaatidega

$$x_i^* = \begin{cases} x_i + \lambda d_i, & \text{kui} \quad i \in I^+ \\ 0, & \text{kui} \quad i \notin I^+, \end{cases}$$

on võrrandisüsteemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lahendiks iga $\lambda$ korral.

Analoogiliselt on selle võrrandisüsteemi lahendiks vektor $\mathbf{x}^{**}$, mille koordinaadid on

$$x_i^{**} = \begin{cases} x_i - \lambda d_i, & \text{kui} \quad i \in I^+ \\ 0, & \text{kui} \quad i \notin I^+, \end{cases}$$

Kuna hulk $I^+$ on lõplik ja $x_i > 0$, võime valida $\lambda > 0$ nii väiksena, et iga $i \in I^+$ korral

$$x_i + \lambda d_i > 0 \qquad \text{ja} \qquad x_i - \lambda d_i > 0.$$

$$\sum_{i \in I^+} (x_i + \lambda d_i)\mathbf{a}_i = \mathbf{b}.$$

Seega vektor $\mathbf{x}^*$ koordinaatidega

$$x_i^* = \begin{cases} x_i + \lambda d_i, & \text{kui} \quad i \in I^+ \\ 0, & \text{kui} \quad i \notin I^+, \end{cases}$$

on võrrandisüsteemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lahendiks iga $\lambda$ korral.

Analoogiliselt on selle võrrandisüsteemi lahendiks vektor $\mathbf{x}^{**}$, mille koordinaadid on

$$x_i^{**} = \begin{cases} x_i - \lambda d_i, & \text{kui} \quad i \in I^+ \\ 0, & \text{kui} \quad i \notin I^+, \end{cases}$$

Kuna hulk $I^+$ on lõplik ja $x_i > 0$, võime valida $\lambda > 0$ nii väiksena, et iga $i \in I^+$ korral

$$x_i + \lambda d_i > 0 \qquad \text{ja} \qquad x_i - \lambda d_i > 0.$$

$$\sum_{i \in I^+} (x_i + \lambda d_i)\mathbf{a}_i = \mathbf{b}.$$

Seega vektor $\mathbf{x}^*$ koordinaatidega

$$x_i^* = \begin{cases} x_i + \lambda d_i, & \text{kui} \quad i \in I^+ \\ 0, & \text{kui} \quad i \notin I^+, \end{cases}$$

on võrrandisüsteemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lahendiks iga $\lambda$ korral.

Analoogiliselt on selle võrrandisüsteemi lahendiks vektor $\mathbf{x}^{**}$, mille koordinaadid on

$$x_i^{**} = \begin{cases} x_i - \lambda d_i, & \text{kui} \quad i \in I^+ \\ 0, & \text{kui} \quad i \notin I^+, \end{cases}$$

Kuna hulk $I^+$ on lõplik ja $x_i > 0$, võime valida $\lambda > 0$ nii väiksena, et iga $i \in I^+$ korral

$$x_i + \lambda d_i > 0 \qquad \text{ja} \qquad x_i - \lambda d_i > 0.$$

Järelikult vektorid $\mathbf{x}^*$ ja $\mathbf{x}^{**}$ on lubatavad lahendid.

Lõigu $\mathbf{x}^*$ ja $\mathbf{x}^{**}$ keskpunktiks on $\mathbf{x}$, sest

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^* + \frac{1}{2}\mathbf{x}^{**}.$$

Järelikult $\mathbf{x}$ ei ole hulga $Q$ tipp.

See on vastuolu eeldusega, et $\mathbf{x}$ on hulga $Q$ tipp.

Antud vastuolu tulenes eeldusest, et vektorid $\mathbf{a}_i$, kus $i \in I^+$, on lineaarselt sõltuvad. Järelikult need vektorid on lineaarselt sõltumatud.

Järelikult vektorid $\mathbf{x}^*$ ja $\mathbf{x}^{**}$ on lubatavad lahendid.

Lõigu $\mathbf{x}^*$ ja $\mathbf{x}^{**}$ keskpunktiks on $\mathbf{x}$, sest

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^* + \frac{1}{2}\mathbf{x}^{**}.$$

Järelikult $\mathbf{x}$ ei ole hulga $Q$ tipp.

See on vastuolu eeldusega, et $\mathbf{x}$ on hulga $Q$ tipp.

Antud vastuolu tulenes eeldusest, et vektorid $\mathbf{a}_i$, kus $i \in I^+$, on lineaarselt sõltuvad. Järelikult need vektorid on lineaarselt sõltumatud.

Järelikult vektorid $\mathbf{x}^*$ ja $\mathbf{x}^{**}$ on lubatavad lahendid.

Lõigu $\mathbf{x}^*$ ja $\mathbf{x}^{**}$ keskpunktiks on $\mathbf{x}$, sest

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^* + \frac{1}{2}\mathbf{x}^{**}.$$

Järelikult $\mathbf{x}$ ei ole hulga $Q$ tipp.

See on vastuolu eeldusega, et $\mathbf{x}$ on hulga $Q$ tipp.

Antud vastuolu tulenes eeldusest, et vektorid $\mathbf{a}_i$, kus $i \in I^+$, on lineaarselt sõltuvad. Järelikult need vektorid on lineaarselt sõltumatud.

Järelikult vektorid $\mathbf{x}^*$ ja $\mathbf{x}^{**}$ on lubatavad lahendid.

Lõigu $\mathbf{x}^*$ ja $\mathbf{x}^{**}$ keskpunktiks on $\mathbf{x}$, sest

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^* + \frac{1}{2}\mathbf{x}^{**}.$$

Järelikult $\mathbf{x}$ ei ole hulga $Q$ tipp.

See on vastuolu eeldusega, et $\mathbf{x}$ on hulga $Q$ tipp.

Antud vastuolu tulenes eeldusest, et vektorid $\mathbf{a}_i$, kus $i \in I^+$, on lineaarselt sõltuvad. Järelikult need vektorid on lineaarselt sõltumatud.

Vektorid $\mathbf{a}_i$ on $m-$mõõtmelised ja seega hulk

$$\{\, \mathbf{a}_i \mid i \in I^+\} \equiv \{\, \mathbf{a}_i \mid x_i > 0\}$$

ei saa sisaldada rohkem kui $m$ elementi.

Kui neid on vähem, siis võime seda hulka täiendada maatriksi $A$ uute veeruvektoritega, kuni saame ruumi $E_m$ baasi.

Tähistame uue baasi indeksite hulka sümboliga $I$. Siis $I^+ \subseteq I$ ja vaadeldava tipu $\mathbf{x} \in Q$ korral

$$A\mathbf{x} \equiv \sum_{i \in I} x_i \mathbf{a}_i = \sum_{i \in I^+} x_i \mathbf{a}_i = \mathbf{b},$$

st tipp $\mathbf{x}$ on planeerimisülesande lubatav baasilahend.

Vektorid $\mathbf{a}_i$ on $m-$mõõtmelised ja seega hulk

$$\{\, \mathbf{a}_i \mid i \in I^+\} \equiv \{\, \mathbf{a}_i \mid x_i > 0\}$$

ei saa sisaldada rohkem kui $m$ elementi.

Kui neid on vähem, siis võime seda hulka täiendada maatriksi $A$ uute veeruvektoritega, kuni saame ruumi $E_m$ baasi.

Tähistame uue baasi indeksite hulka sümboliga $I$. Siis $I^+ \subseteq I$ ja vaadeldava tipu $\mathbf{x} \in Q$ korral

$$A\mathbf{x} \equiv \sum_{i \in I} x_i \mathbf{a}_i = \sum_{i \in I^+} x_i \mathbf{a}_i = \mathbf{b},$$

st tipp $\mathbf{x}$ on planeerimisülesande lubatav baasilahend.

Vektorid $\mathbf{a}_i$ on $m-$mõõtmelised ja seega hulk

$$\{\, \mathbf{a}_i \mid i \in I^+\} \equiv \{\, \mathbf{a}_i \mid x_i > 0\}$$

ei saa sisaldada rohkem kui $m$ elementi.

Kui neid on vähem, siis võime seda hulka täiendada maatriksi $A$ uute veeruvektoritega, kuni saame ruumi $E_m$ baasi.

Tähistame uue baasi indeksite hulka sümboliga $I$. Siis $I^+ \subseteq I$ ja vaadeldava tipu $\mathbf{x} \in Q$ korral

$$A\mathbf{x} \equiv \sum_{i \in I} x_i \mathbf{a}_i = \sum_{i \in I^+} x_i \mathbf{a}_i = \mathbf{b},$$

st tipp $\mathbf{x}$ on planeerimisülesande lubatav baasilahend.