Matemaatiline planeerimine, lineaarse planeerimisülesande püstitus.

September 14, 2016

Ülesande püstitus

Matemaatiline planeerimine on matemaatikaharu, mis uurib lisatingimustega ekstreemumülesandeid ja nende lahendamise meetodeid.

Nende ülesannete lahendamise meetoteid ja ülesandele vastava matemaatilise mudeli koostamist.

Matemaatilises planeerimises käsitletakse tavaliselt lõplikumõõtmelisi mudeleid.

Matemaatilise planeerimise ülesanded on oma olemuselt erikujulised ekstreemumülesanded.

Ülesande püstitus

Matemaatiline planeerimine on matemaatikaharu, mis uurib lisatingimustega ekstreemumülesandeid ja nende lahendamise meetodeid.

Nende ülesannete lahendamise meetoteid ja ülesandele vastava matemaatilise mudeli koostamist.

Matemaatilises planeerimises käsitletakse tavaliselt lõplikumõõtmelisi mudeleid.

Matemaatilise planeerimise ülesanded on oma olemuselt erikujulised ekstreemumülesanded.

Ülesande püstitus

Matemaatiline planeerimine on matemaatikaharu, mis uurib lisatingimustega ekstreemumülesandeid ja nende lahendamise meetodeid.

Nende ülesannete lahendamise meetoteid ja ülesandele vastava matemaatilise mudeli koostamist.

Matemaatilises planeerimises käsitletakse tavaliselt lõplikumõõtmelisi mudeleid.

Matemaatilise planeerimise ülesanded on oma olemuselt erikujulised ekstreemumülesanded.

Ülesande püstitus

Matemaatiline planeerimine on matemaatikaharu, mis uurib lisatingimustega ekstreemumülesandeid ja nende lahendamise meetodeid.

Nende ülesannete lahendamise meetoteid ja ülesandele vastava matemaatilise mudeli koostamist.

Matemaatilises planeerimises käsitletakse tavaliselt lõplikumõõtmelisi mudeleid.

Matemaatilise planeerimise ülesanded on oma olemuselt erikujulised ekstreemumülesanded.

Võrreldes klassikalise matemaatilise analüüsi ekstreemumülesannetega võib matemaatilise planeerimise juures välja tuua kaks erinevust:

- praktilised planeerimisülesanded sisaldavad väga suurt arvu muutujaid. Väga paljude muutujatega funktsiooni ekstreemumite leidmine on küllalt keeruline ja mahukate arvutustega ülesanne. Seetõttu on vaja leida efektiivsed lahendusmeetodid, mis arvestavad püstitatud ülesande erikuju, olemust jne;
- harilikult asub planeerimisülesande otsitav ekstreemum vastava funktsiooni määramispiirkonna rajapunktis, seetõttu klassikalised võtted (osatuletiste võrdsustamine nulliga) ei ole rakandatavad. Samuti võib juhtuda, et vastav funktsioon ei ole diferentseeruv.

Võrreldes klassikalise matemaatilise analüüsi ekstreemumülesannetega võib matemaatilise planeerimise juures välja tuua kaks erinevust:

- praktilised planeerimisülesanded sisaldavad väga suurt arvu muutujaid. Väga paljude muutujatega funktsiooni ekstreemumite leidmine on küllalt keeruline ja mahukate arvutustega ülesanne. Seetõttu on vaja leida efektiivsed lahendusmeetodid, mis arvestavad püstitatud ülesande erikuju, olemust jne;
- harilikult asub planeerimisülesande otsitav ekstreemum vastava funktsiooni määramispiirkonna rajapunktis, seetõttu klassikalised võtted (osatuletiste võrdsustamine nulliga) ei ole rakandatavad. Samuti võib juhtuda, et vastav funktsioon ei ole diferentseeruv.

Võrreldes klassikalise matemaatilise analüüsi ekstreemumülesannetega võib matemaatilise planeerimise juures välja tuua kaks erinevust:

- praktilised planeerimisülesanded sisaldavad väga suurt arvu muutujaid. Väga paljude muutujatega funktsiooni ekstreemumite leidmine on küllalt keeruline ja mahukate arvutustega ülesanne. Seetõttu on vaja leida efektiivsed lahendusmeetodid, mis arvestavad püstitatud ülesande erikuju, olemust jne;
- harilikult asub planeerimisülesande otsitav ekstreemum vastava funktsiooni määramispiirkonna rajapunktis, seetõttu klassikalised võtted (osatuletiste võrdsustamine nulliga) ei ole rakandatavad. Samuti võib juhtuda, et vastav funktsioon ei ole diferentseeruv.

Planeerimisülesannete liigitus

Planeerimisülesandeid võib liigitada mitmeti:

- staatilised ja düaamilised ülesanded;
- deterministlikud ja stohhastilised ülesanded;
- lineaarsed ja mittelineaarsed ülesanded;
- sihifunktsiooniga ja ilma sihifunktsioonita tasakaaluülesanded

Sihifunktsiooniga ülesanded

Leida funktsiooni

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

maksimaalne väärtus selliselt, et oleksid täidetud tingimused:

$$\begin{gathered} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant 0, \\ \ldots \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant 0, \end{gathered}$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ x_n \geqslant 0.$$

Lineaarne planeerimisülesanne - **standartne kuju**

Kui planeerimisülesandes esinevad funktsioonid on lineaarsed, siis nimetatakse matemaatilise planeerimise ülesannet lineaarseks planeerimisülesandeks (LP).

Iga lineaarse planeerimise ülesande võib esitada kujul:

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \quad \to \quad max$$

$$\begin{gathered}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \leqslant b_1, \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \leqslant b_2, \\
\ldots \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \leqslant b_m,
\end{gathered}$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ x_n \geqslant 0.$$

Kasutame vektoreid:

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ja $m \times n$ maatriksit $A = (a_{ij})$ saame standartse LP esitada kujul

$$\begin{aligned} z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \quad &\rightarrow \quad max \\ A\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}&, \\ \mathbf{x} \geqslant 0&. \end{aligned}$$

Iga LP ülesande saab esitada **kanoonilisel kujul**:

$$\begin{aligned} z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \quad &\rightarrow \quad max \\ A\mathbf{x} = \mathbf{b}&, \\ \mathbf{x} \geqslant 0&. \end{aligned}$$

Kasutame vektoreid:

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ja $m \times n$ maatriksit $A = (a_{ij})$ saame standartse LP esitada kujul

$$\begin{aligned} z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \quad &\rightarrow \quad max \\ A\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}&, \\ \mathbf{x} \geqslant 0&. \end{aligned}$$

Iga LP ülesande saab esitada **kanoonilisel kujul**:

$$\begin{aligned} z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \quad &\rightarrow \quad max \\ A\mathbf{x} = \mathbf{b}&, \\ \mathbf{x} \geqslant 0&. \end{aligned}$$

Avaldist $z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ nimetatakse **sihifunktsiooniks** ja hulka

$$Q = \{\ \mathbf{x} \mid A\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqslant 0\ \} \quad \text{või} \quad Q = \{\ \mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqslant 0\ \}$$

nimetatakse **lubatud lahendite hulgaks** ehk planeerimisülesande **plaaniks.**

Niisugust lubatud lahendit, mille korral sihifunktsioon omandab maksimaalse väärtuse, võrreldes tema väärtustega kõigi teiste lubatavate lahendite puhul, nimetatakse planeerimisülesande **optimaalseks lahendiks** ehk **optimaalseks plaaniks** (sageli lihtsalt lahendiks).

Avaldist $z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ nimetatakse **sihifunktsiooniks** ja hulka

$$Q = \{\ \mathbf{x} \mid A\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqslant 0\ \} \quad \text{või} \quad Q = \{\ \mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqslant 0\ \}$$

nimetatakse **lubatud lahendite hulgaks** ehk planeerimisülesande **plaaniks.**

Niisugust lubatud lahendit, mille korral sihifunktsioon omandab maksimaalse väärtuse, võrreldes tema väärtustega kõigi teiste lubatavate lahendite puhul, nimetatakse planeerimisülesande **optimaalseks lahendiks** ehk **optimaalseks plaaniks** (sageli lihtsalt lahendiks)**.**

Kui planeerimisülesande mõned kitsendused on antud võrratustena, siis muutujate arvu suurendamisega saab need alati muuta võrranditeks.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1$$

$$\Updownarrow$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \;\; x_{n+1} \geqslant 0.$$

Kanoonilisel kujul antud LP kitsendused $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ on olemuselt lineaarne võrrandisüsteem, see on lahenduv parajasti siis, kui astakutingimus on täidetud.

Kui planeerimisülesande mõned kitsendused on antud võrratustena, siis muutujate arvu suurendamisega saab need alati muuta võrranditeks.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1$$

$$\Updownarrow$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \ \ x_{n+1} \geqslant 0.$$

Kanoonilisel kujul antud LP kitsendused $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ on olemuselt lineaarne võrrandisüsteem, see on lahenduv parajasti siis, kui astakutingimus on täidetud.

Oletame, et astakutingimus on täidetud ja $m = n$. Siis on süsteemili ainult üks lahend. Kui selle lahendi kõik komponendid on mittenegatiivsed, siis see ongi ülesande optimaalne lahend.

Kui nende hulgas leidub mõni negatiivne arv, siis planeerimisülesandel puudub optimaalne lahend.

Kui $m < n$, siis on süsteemil lõpmata palju lahendeid. Sama olukord on ka siis kui $m > n$, sellisel juhul on võrrandite hulgas lineaarselt sõltuvad võrrandid.

Oletame, et astakutingimus on täidetud ja $m = n$. Siis on süsteemili ainult üks lahend. Kui selle lahendi kõik komponendid on mittenegatiivsed, siis see ongi ülesande optimaalne lahend.

Kui nende hulgas leidub mõni negatiivne arv, siis planeerimisülesandel puudub optimaalne lahend.

Kui $m < n$, siis on süsteemil lõpmata palju lahendeid. Sama olukord on ka siis kui $m > n$, sellisel juhul on võrrandite hulgas lineaarselt sõltuvad võrrandid.

Oletame, et astakutingimus on täidetud ja $m = n$. Siis on süsteemili ainult üks lahend. Kui selle lahendi kõik komponendid on mittenegatiivsed, siis see ongi ülesande optimaalne lahend.

Kui nende hulgas leidub mõni negatiivne arv, siis planeerimisülesandel puudub optimaalne lahend.

Kui $m < n$, siis on süsteemil lõpmata palju lahendeid. Sama olukord on ka siis kui $m > n$, sellisel juhul on võrrandite hulgas lineaarselt sõltuvad võrrandid.

Sõltumata sellest, kas kitsendused on antud võrrandite või võrratuste kujul, on lõpmata paljude lahendite korral järgmised võimalused:

a) lahendite hulgas puuduvad lubatavad lahendid
b) sihifunktsioon on lubatavate lahendite hulgal ülalt tõkestamata; vormistatud ebakorrektselt.
c) sihifunktsioon on lubatavate lahendite hulgal ülalt tõkestatud.

Juhul a) ja b) planeerimisülesanne ei ole lahenduv.

Juhul c) on alati olemas vähemalt üks optimaalne lahend ja planeerimisülesanne on lahenduv.

Sõltumata sellest, kas kitsendused on antud võrrandite või võrratuste kujul, on lõpmata paljude lahendite korral järgmised võimalused:

a) lahendite hulgas puuduvad lubatavad lahendid
b) sihifunktsioon on lubatavate lahendite hulgal ülalt tõkestamata; vormistatud ebakorrektselt.
c) sihifunktsioon on lubatavate lahendite hulgal ülalt tõkestatud.

Juhul a) ja b) planeerimisülesanne ei ole lahenduv.

Juhul c) on alati olemas vähemalt üks optimaalne lahend ja planeerimisülesanne on lahenduv.

Sõltumata sellest, kas kitsendused on antud võrrandite või võrratuste kujul, on lõpmata paljude lahendite korral järgmised võimalused:

a) lahendite hulgas puuduvad lubatavad lahendid
b) sihifunktsioon on lubatavate lahendite hulgal ülalt tõkestamata; vormistatud ebakorrektselt.
c) sihifunktsioon on lubatavate lahendite hulgal ülalt tõkestatud.

Juhul a) ja b) planeerimisülesanne ei ole lahenduv.

Juhul c) on alati olemas vähemalt üks optimaalne lahend ja planeerimisülesanne on lahenduv.

Lubatavate lahendite puudumine või sihifunktsiooni tõkestamatus tähendavad tavaliselt, et majanduslik ülesanne on vormistatud ebakorrektselt.

Juhtumil a) on tegemist liiga rangete kitsendustega, st nendel tingimustel ei ole võimalik mingit lubatavat plaani koostada.

Juhul b) on kitsenduste hulgast midagi olulist välja jäänud.

Lubatavate lahendite puudumine või sihifunktsiooni tõkestamatus tähendavad tavaliselt, et majanduslik ülesanne on vormistatud ebakorrektselt.

Juhtumil a) on tegemist liiga rangete kitsendustega, st nendel tingimustel ei ole võimalik mingit lubatavat plaani koostada.

Juhul b) on kitsenduste hulgast midagi olulist välja jäänud.

Lubatavate lahendite puudumine või sihifunktsiooni tõkestamatus tähendavad tavaliselt, et majanduslik ülesanne on vormistatud ebakorrektselt.

Juhtumil a) on tegemist liiga rangete kitsendustega, st nendel tingimustel ei ole võimalik mingit lubatavat plaani koostada.

Juhul b) on kitsenduste hulgast midagi olulist välja jäänud.