

Analüütiline geomeetria

Vektorkorrutis

Mati Väljas

mati.valjas@ttu.ee
www.staff.ttu.ee/~mvaljas
Tallinna Tehnikaülikool

November 14, 2013

Kolmemõõtmeline ruum

Vaatleme kolmemõõtmelist eukleidilist punktiruumi $\mathbb{R}^3$.

Varasemast teame, et skalaarkorrutis rihiruumis võimaldab arvutada vektorite pikkusi, punktidevahelisi kaugusi, vektoritevahelisi nurki, kujundite pindalasid ja kehade ruumalasid.

Eukleidilise geomeetria paljude ülesannete lahendamiseks on kasulik defineerida eukleidilises vektorruumis veel mõned uued tehted vektoritega.

Kolmemõõtmeline ruum

Vaatleme kolmemõõtmelist eukleidilist punktiruumi $\mathbb{R}^3$.

Varasemast teame, et skalaarkorrutis rihiruumis võimaldab arvutada vektorite pikkusi, punktidevahelisi kaugusi, vektoritevahelisi nurki, kujundite pindalasid ja kehade ruumalasid.

Eukleidilise geomeetria paljude ülesannete lahendamiseks on kasulik defineerida eukleidilises vektorruumis veel mõned uued tehted vektoritega.

Kolmemõõtmeline ruum

Vaatleme kolmemõõtmelist eukleidilist punktiruumi $\mathbb{R}^3$.

Varasemast teame, et skalaarkorrutis rihiruumis võimaldab arvutada vektorite pikkusi, punktidevahelisi kaugusi, vektoritevahelisi nurki, kujundite pindalasid ja kehade ruumalasid.

Eukleidilise geomeetria paljude ülesannete lahendamiseks on kasulik defineerida eukleidilises vektorruumis veel mõned uued tehned vektoritega.

Parema käe reeper

Definitsioon

Öeldakse, et reeper $\mathcal{R}^\perp = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ on **parema käe reeper**, kui selle vektor $\vec{i}$ on suunatud parema käe nimetissõrme suunas, vektori $\vec{j}$ suund ühtib parema käe Pika Peetri¹ suunaga ja vektori $\vec{k}$ suund ühtib parema käe pöidla suunaga.

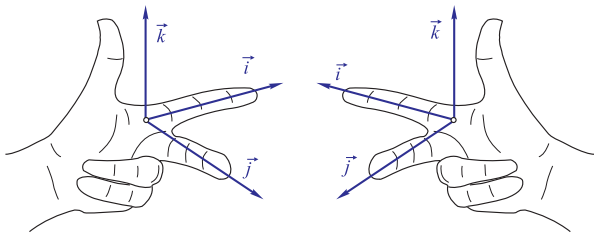


Figure : Vasaku ja parema käe kolmikud

¹Sõrmede rahvapärased nimetused alates pöidlalt: pöial ehk täitapp, nimetissõrm ehk kotinõel, Pikk Peeter, Nimeta Mats ja Väike Ats.

Kruvireegel

Sageli kasutatakse ruumis orientatsiooni määramiseks **kruvireeglit**.

Definitsioon

Õeldakse, et ruumi mistahes punktist rakendatud kolm mittekomplanaarset vektorit $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ moodustavad parema käe kolmiku, kui vektori $\vec{a}$ pööramisel mööda lühimat pööret vektori $\vec{b}$ poole on vektor $\vec{c}$ suunatud sellese poolruumi, kuhu liigub sellel pöördel vektoritega $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ristuv parema käe kruvi.

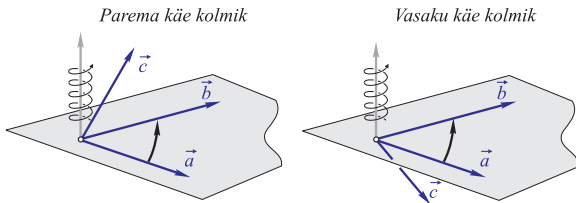


Figure : Vasaku ja parema käe kolmikud

Vektorkorrutise definitsioon

Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ **vektorkorrutiseks** nimetatakse vektorit $\vec{a} \times \vec{b}$, millel on järgmised omadused:

1. vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ on risti vektoritega $\vec{a}$ ja $\vec{b}$;
2. vektori pikkus $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \alpha$, kus α on vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vaheline nurk;
3. vektorid $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{a} \times \vec{b}$ moodustavad parema käe kolmiku.

Vektorkorrutise definitsioon

Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ **vektorkorrutiseks** nimetatakse vektorit $\vec{a} \times \vec{b}$, millel on järgmised omadused:

1. vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ on risti vektoritega $\vec{a}$ ja $\vec{b}$;
2. vektori pikkus $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \alpha$, kus α on vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vaheline nurk;
3. vektorid $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{a} \times \vec{b}$ moodustavad parema käe kolmiku.

Vektorkorrutise definitsioon

Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ **vektorkorrutiseks** nimetatakse vektorit $\vec{a} \times \vec{b}$, millel on järgmised omadused:

1. vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ on risti vektoritega $\vec{a}$ ja $\vec{b}$;
2. vektori pikkus $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \alpha$, kus α on vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vaheline nurk;
3. vektorid $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{a} \times \vec{b}$ moodustavad parema käe kolmiku.

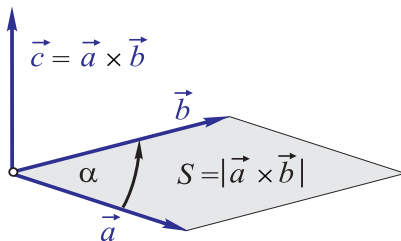
Vektorkorrutise definitsioon

Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ **vektorkorrutiseks** nimetatakse vektorit $\vec{a} \times \vec{b}$, millel on järgmised omadused:

1. vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ on risti vektoritega $\vec{a}$ ja $\vec{b}$;
2. vektori pikkus $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \alpha$, kus α on vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vaheline nurk;
3. vektorid $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{a} \times \vec{b}$ moodustavad parema käe kolmiku.

Vektorkorrutis

Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vektorkorrutist on illustreeritud joonisel.



Vektorkorrutise omadused

Omadus

Vektorite vektorkorrutis on assotsiatiivne arvuga korrutamise suhtes, s.t

$$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3, \forall \vec{b} \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{korral} \quad (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}).$$

Omadus

Vektorite $\vec{a} \neq \vec{0}$ ja $\vec{b} \neq \vec{0}$ vektorkorrutis on nullvektor parajasti siis, kui vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on kollineaarsed, s.t

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

Vektorkorrutise omadused

Omadus

Vektorite vektorkorrutis on assotsiatiivne arvuga korrutamise suhtes, s.t

$$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3, \forall \vec{b} \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{korral} \quad (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}).$$

Omadus

Vektorite $\vec{a} \neq \vec{0}$ ja $\vec{b} \neq \vec{0}$ vektorkorrutis on nullvektor parajasti siis, kui vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on kollineaarsed, s.t

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

Vektorkorrutise omadused

Omadus

Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vektorkorrutise pikkus on võrdne nendele vektoritele ehitatud rööpküliku pindalaga, s.t

$$S = | \vec{a} \times \vec{b} |.$$

Omadus

Vektorkorrutis on distributiivne vektorite liitmise suhtes, s.t

$$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3, \forall \vec{b} \in \mathbb{R}^3, \forall \vec{c} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{korral} \quad (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

Vektorkorrutise omadused

Omadus

Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vektorkorrutise pikkus on võrdne nendele vektoritele ehitatud rööpküliku pindalaga, s.t

$$S = | \vec{a} \times \vec{b} |.$$

Omadus

Vektorkorrutis on distributiivne vektorite liitmise suhtes, s.t

$$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3, \forall \vec{b} \in \mathbb{R}^3, \forall \vec{c} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{korral} \quad (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

Reeperivektorite vektorkorrutised

Kasutades vektorkorrutise definitsiooni, saame koostada ristreeperi $\mathfrak{R}^\perp = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ vektorite jaoks korrutustabeli.

Tabelist reeperivektorite korrutise leidmiseks tuleb esimene tegur valida tabeli esimesest veerust ja teine tegur esimest reast ning leida korrutis valitud rea ja veeru ristumiskohast.

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

Reeperivektorite vektorkorrutised

Kasutades vektorkorrutise definitsiooni, saame koostada ristreeperi $\mathfrak{R}^\perp = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ vektorite jaoks korrutustabeli. Tabelist reeperivektorite korrutise leidmiseks tuleb esimene tegur valida tabeli esimesest veerust ja teine tegur esimest reast ning leida korrutis valitud rea ja veeru ristumiskohast.

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{\theta}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{\theta}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{\theta}$

Vektorkorrutise arvutamine

Selgitame, kuidas arvutada vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vektorkorrutist, kui teame nende vektorite koordinaate valitud ristreeperi suhtes.

Olgu

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \quad \text{ja} \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z).$$

Kasutades eespool olevaid omadusi ja säilitades baasivektorite korrutamise järjekorra, leiame

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + \\ &+ a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + \\ &+ a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}). \end{aligned}$$

Vektorkorrutise arvutamine

Selgitame, kuidas arvutada vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vektorkorrutist, kui teame nende vektorite koordinaate valitud ristreeperi suhtes.

Olgu

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \quad \text{ja} \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z).$$

Kasutades eespool olevaid omadusi ja säilitades baasivektorite korrutamise järjekorra, leiame

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + \\ &+ a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + \\ &+ a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}). \end{aligned}$$

Vektorkorrutise arvutamine

Pärast korrutustabeli kasutamist ja reeperivektorite järgi rühmitamist saame tulemuse, mille esitame kujul

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k},$$

ehk koordinaatkujul

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right).$$

Vektorkorrutise arvutamine

Pärast korrutustabeli kasutamist ja reeperivektorite järgi rühmitamist saame tulemuse, mille esitame kujul

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k},$$

ehk koordinaatkujul

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right).$$

Vektorkorrutise arvutamine

Kasutades kolmerealise determinandi arendusteoreemi esimese rea järgi, saame vektorkorrutise arvutuseeskirja kirjutada kolmerealise determinandina

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Esitades korrutustabeli maatriksina, saame vektorkorrutise arvutamise reegli kirjutada maatrikskujul

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \quad a_y \quad a_z) \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ \vec{j} & -\vec{i} & \vec{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}.$$

Vektorkorrutise arvutamine

Kasutades kolmerealise determinandi arendusteoreemi esimese rea järgi, saame vektorkorrutise arvutuseeskirja kirjutada kolmerealise determinandina

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Esitades korrutustabeli matriksina, saame vektorkorrutise arvutamise reegli kirjutada matrikskujul

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \quad a_y \quad a_z) \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ \vec{j} & -\vec{i} & \vec{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}.$$

Vektorkorrutise arvutamine

Rõhutame veel kord, et kõiki tuletatud vektorkorrutise arvutamise valemeid saab kasutada ainult siis, kui vektorite koordinaadid on antud parema käe ristreeperi suhtes.

Analüütiline geomeetria

Vektorite segakorrutis

Mati Väljas

mati.valjas@ttu.ee
www.staff.ttu.ee/~mvaljas
Tallinna Tehnikaülikool

November 14, 2013

Segakorrutise definitsioon

Eukleidilises ruumis $\mathbb{R}^3$ saame skalaarkorrutise ja vektorkorrutise abil defineerida veel ühe korrutise.

Definitsioon

Vektorite $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ **segakorrutiseks** nimetatakse reaalarvu

$$(\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}) \stackrel{\text{def}}{=} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Vektorite segakorrutis on veidi tavapäratu, sest see peab alati sisaldama kolme tegurit, kõik seni vaadeldud korrutised sisaldasid kahte tegurit.

Segakorrutise definitsioon

Eukleidilises ruumis $\mathbb{R}^3$ saame skalaarkorrutise ja vektorkorrutise abil defineerida veel ühe korrutise.

Definitsioon

Vektorite $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ **segakorrutiseks** nimetatakse reaalarvu

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) \stackrel{\text{def}}{=} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Vektorite segakorrutis on veidi tavapäratu, sest see peab alati sisaldama kolme tegurit, kõik seni vaadeldud korrutised sisaldasid kahte tegurit.

Segakorrutise definitsioon

Eukleidilises ruumis $\mathbb{R}^3$ saame skalaarkorrutise ja vektorkorrutise abil defineerida veel ühe korrutise.

Definitsioon

Vektorite $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ **segakorrutiseks** nimetatakse reaalarvu

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) \stackrel{\text{def}}{=} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Vektorite segakorrutis on veidi tavapäratu, sest see peab alati sisaldama kolme tegurit, kõik seni vaadeldud korrutised sisaldasid kahte tegurit.

Segakorrutise arvutamine

Olgu eukleidilises ruumis $\mathbb{R}^3$ parema käe ristreeperi suhtes antud kolm vektorit

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z) \quad \text{ja} \quad \vec{c} = (c_x, c_y, c_z).$$

Vektorkorrutise arvutamise valemi põhjal leiame

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z.$$

Kasutades kolmandat järku determinandi arendusteoreemi viimase rea järgi ja segakorrutise definitsiooni, saame segakorrutise arvutamiseks valemi

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Segakorrutise arvutamine

Olgu eukleidilises ruumis $\mathbb{R}^3$ parema käe ristreeperi suhtes antud kolm vektorit

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z) \quad \text{ja} \quad \vec{c} = (c_x, c_y, c_z).$$

Vektorkorrutise arvutamise valemi põhjal leiame

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z.$$

Kasutades kolmandat järku determinandi arendusteoreemi viimase rea järgi ja segakorrutise definitsiooni, saame segakorrutise arvutamiseks valemi

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Segakorrutise arvutamine

Olgu eukleidilises ruumis $\mathbb{R}^3$ parema käe ristreeperi suhtes antud kolm vektorit

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z) \quad \text{ja} \quad \vec{c} = (c_x, c_y, c_z).$$

Vektorkorrutise arvutamise valemi põhjal leiame

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z.$$

Kasutades kolmandat järku determinandi arendusteoreemi viimase rea järgi ja segakorrutise definitsiooni, saame segakorrutise arvutamiseks valemi

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Segakorrutise omadused

Rõhutame, et segakorrutise arvutamise valem on tuletatud eeldusel, et me kasutame ristkoordinaate.

Kolme vektori segakorrutisel on järgmised omadused.

Omadus

Kolme vektori segakorrutise absoluutväärtus on võrdne nende lektoritele ehitatud rööptahuka ruumalaga, s.t

$$V = |(\vec{a} \vec{b} \vec{c})|.$$

Segakorrutise omadused

Rõhutame, et segakorrutise arvutamise valem on tuletatud eeldusel, et me kasutame ristkoordinaate.

Kolme vektori segakorrutisel on järgmised omadused.

Omadus

Kolme vektori segakorrutise absoluutväärtus on võrdne nende lektoritele ehitatud rööptahuka ruumalaga, s.t

$$V = |(\vec{a} \vec{b} \vec{c})|.$$

Segakorrutise omadused

Rõhutame, et segakorrutise arvutamise valem on tuletatud eeldusel, et me kasutame ristkoordinaate.

Kolme vektori segakorrutisel on järgmised omadused.

Omadus

Kolme vektori segakorrutise absoluutväärus on võrdne nende lektoritele ehitatud rööptahuka ruumalaga, s.t

$$V = |(\vec{a} \vec{b} \vec{c})|.$$

Omaduse tõestus

Tõestus.

Konstrueerime vektoritele $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ rööptahuka (vt joonis järgmisel slaidil). Loeme selle rööptahuka põhjaks vektoritele $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ehitatud rööpküliku. Järelikult on selle rööptahuka põhja pindala $S_p = |\vec{a} \times \vec{b}|$ ja kõrguseks olev lõik h kollineaarne vektoriga $\vec{a} \times \vec{b}$. Kasutades vektorite vahelise nurga leidmise valemit ja segakorrutise definitsiooni, võime kirjutada

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \gamma.$$

Joonisel olevast täisnurksest kolmnurgast saame rööptahuka kõrguse

$h = |\vec{c}| \cos \gamma$. Viimane avaldis osutub negatiivseks, kui γ on nürinurk.

Kuna rööptahuka ruumala $V = S_p h$ on positiivne ja arvestades leitud seost, saamegi rööptahuka ruumala arvutamise valemi.

Omaduse tõestus, joonis

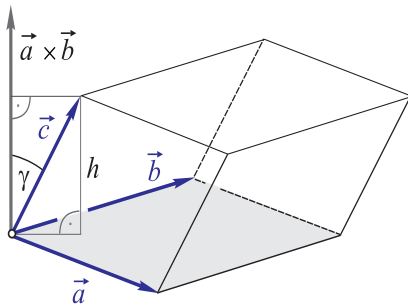


Figure : Segakorrutis

Segakorrutise omadused

Omadus

Kolm nullvektorist erinevat vektorit $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ on komplanaarsed parajasti siis, kui nende segakorrutis on null, s.t

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = 0 \iff \vec{a}, \vec{b} \text{ ja } \vec{c} \text{ on komplanaarsed.}$$

Tõestus.

Järeldub vahetult eelmise omaduse tõestusest, sest nurk

$$\gamma = \frac{\pi}{2}.$$



Segakorrutise omadused

Omadus

Kolm nullvektorist erinevat vektorit $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ on komplanaarsed parajasti siis, kui nende segakorrutis on null, s.t

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = 0 \iff \vec{a}, \vec{b} \text{ ja } \vec{c} \text{ on komplanaarsed.}$$

Tõestus.

Järeldub vahetult eelmise omaduse tõestusest, sest nurk

$$\gamma = \frac{\pi}{2}.$$



Segakorrutise omadused

Omadus

Kolm nullvektorist erinevat vektorit $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ moodustavad parema käe kolmiku, kui nende segakorrutis on positiivne ja vasaku käe kolmiku, kui nende segakorrutis on negatiivne, s.t

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) \quad \begin{cases} > 0, & \text{parema käe kolmik,} \\ < 0, & \text{vasaku käe kolmik.} \end{cases}$$

Tõestus.

Järeldub vahetult omaduse ruulaga seotud omaduse tõestusest.



Segakorrutise omadused

Omadus

Kolm nullvektorist erinevat vektorit $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ moodustavad parema käe kolmiku, kui nende segakorrutis on positiivne ja vasaku käe kolmiku, kui nende segakorrutis on negatiivne, s.t

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) \quad \begin{cases} > 0, & \text{parema käe kolmik,} \\ < 0, & \text{vasaku käe kolmik.} \end{cases}$$

Tõestus.

Järeldub vahetult omaduse ruulaga seotud omaduse tõestusest.



Omaduse tõestus, joonis

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \gamma.$$

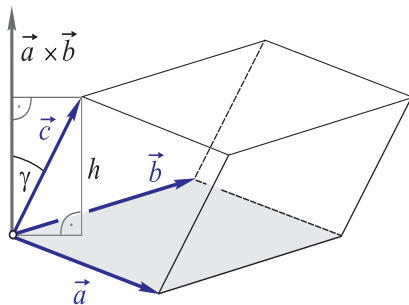


Figure : Segakorrutis

Segakorrutise omadused

Omadus

Vektorite $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ segakorrutises tegurite ümbertõstmisel kehtib reegel

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = (\vec{b} \vec{c} \vec{a}) = (\vec{c} \vec{a} \vec{b}) = -(\vec{b} \vec{a} \vec{c}) = -(\vec{a} \vec{c} \vec{b}) = -(\vec{c} \vec{b} \vec{a}).$$

Näide

Näide

Tetraeedri tipud on $A(2, -2, 1)$, $B(-1, 2, 2)$, $C(1, 1, 2)$ ja $D(4, -3, -5)$. Arvutada tetraeedri ruumala ning tipust D tõmmatud kõrgus.

Lahendus. Arvutame mingist tipust, näiteks A , väljuvad tetraeedri servade vektorid $\overrightarrow{AB} = (-3, 4, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 3, 1)$ ja $\overrightarrow{AD} = (2, -1, -6)$.

Näide

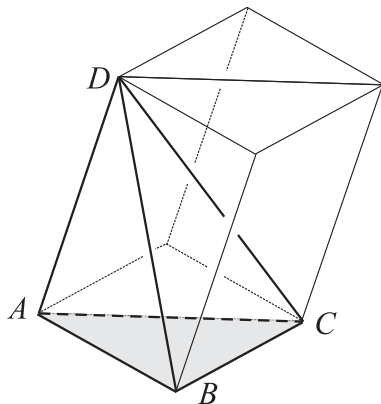
Näide

Tetraeedri tipud on $A(2, -2, 1)$, $B(-1, 2, 2)$, $C(1, 1, 2)$ ja $D(4, -3, -5)$. Arvutada tetraeedri ruumala ning tipust D tõmmatud kõrgus.

Lahendus. Arvutame mingist tipust, näiteks A , väljuvad tetraeedri servade vektorid $\overrightarrow{AB} = (-3, 4, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 3, 1)$ ja $\overrightarrow{AD} = (2, -1, -6)$.

Näide, joonis

Selle tetraeedri ruumala on $\frac{1}{6}$ nendele vektoritele ehitatud rööptahuka ruumalast, sest tetraeeder on $\frac{1}{3}$ prismast, mille põhjaks on kolmnurk ABC , selle prisma ruumala on aga pool vastava rööptahuka ruumalast (vt joonis).



Näide

Arvutame vektorkorrutise

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (1, 2, -5).$$

ja segakorrutise

$$(\vec{AB} \vec{AC} \vec{AD}) = (\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD} = 30,$$

mis on rööptahuka ruumala.

Seega tetraeedri ruumala $V = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5$. Nendele vektoritele ehitatud tetraeedril ja rööptahukal on sama kõrgus, siis jagame rööptahuka ruumala tema põhja pindalaga ning saame

$$h = \frac{|(\vec{AB} \vec{AC} \vec{AD})|}{|\vec{AB} \times \vec{AC}|} = \frac{30}{\sqrt{30}} = \sqrt{30}.$$

Näide

Arvutame vektorkorrutise

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (1, 2, -5).$$

ja segakorrutise

$$(\vec{AB} \vec{AC} \vec{AD}) = (\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD} = 30,$$

mis on rööptahuka ruumala.

Seega tetraeedri ruumala $V = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5$. Nendele vektoritele ehitatud tetraeedril ja rööptahukal on sama kõrgus, siis jagame rööptahuka ruumala tema põhja pindalaga ning saame

$$h = \frac{|(\vec{AB} \vec{AC} \vec{AD})|}{|\vec{AB} \times \vec{AC}|} = \frac{30}{\sqrt{30}} = \sqrt{30}.$$

Näide

Arvutame vektorkorrutise

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (1, 2, -5).$$

ja segakorrutise

$$(\vec{AB} \vec{AC} \vec{AD}) = (\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD} = 30,$$

mis on rööptahuka ruumala.

Seega tetraeedri ruumala $V = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5$. Nendele vektoritele ehitatud tetraeedril ja rööptahukal on sama kõrgus, siis jagame rööptahuka ruumala tema põhja pindalaga ning saame

$$h = \frac{|(\vec{AB} \vec{AC} \vec{AD})|}{|\vec{AB} \times \vec{AC}|} = \frac{30}{\sqrt{30}} = \sqrt{30}.$$