

## Matemaatiline analüüs II iseseisvad ülesanded

Ülesannetes 1. - 8. esitage funktsiooni määramispiirkond võrratuste abil ja kujutage  $xy$ -tasandil.

1.  $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$ .

2.  $z = \arcsin \frac{y+2}{x-1} + \ln y$ .

3.  $z = \sqrt{\sin \pi(x^2 + y^2)}$ .

4.  $z = \ln x - \ln \sin y$ .

5.  $z = \sqrt{4 - x^2} + \ln(y^2 - 4)$

6.  $z = \sqrt{\arcsin \frac{x}{y}}$

7.  $z = (y + \sqrt{y})\sqrt{\cos x}$

8.  $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} - 2 \ln(9 - x^2 - y^2)$

9. Kas funktsioonid

$$z = \sqrt{x \sin y} \quad \text{ja} \quad z = \sqrt{x} \sqrt{\sin y}$$

on identsed? Miks?

10. Kas funktsioonid

$$z = \ln xy \quad \text{ja} \quad z = \ln x + \ln y$$

on identsed? Miks?

11.  $f(x, y) = \frac{3x^2 - y}{2x + y}$ . Leidke  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$  ja  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ . Kas on olemas  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ ?

Leidke piirväärtus

12.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$

$$13. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$$

$$14. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$15. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

$$16. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$17. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}$$

Leidke antud funktsiooni osatuletised kõikide sõltumatute muutujate järgi.

$$18. z = x^2 \sqrt[3]{y} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{y}}$$

$$19. z = \ln \tan \frac{x}{y}$$

$$20. z = e^{-\frac{x}{y}}.$$

$$21. z = \sin xy - \cos \frac{y}{x}.$$

$$22. z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$23. z = \arctan \frac{y}{\sqrt{x}}.$$

$$24. z = xy \ln(x + y).$$

$$25. w = \ln(xy + \ln z)$$

$$26. w = \tan(x^2 + y^3 + z^4).$$

$$27. w = x^{y^z}.$$

$$28. z = (x^2 + y^2) \frac{1 - \sqrt{x^2 + y^2}}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$29. \text{Arvutage funktsiooni } z = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ osatuletised punktis } (1; -2).$$

30.  $z = \frac{x \cos y - y \cos x}{1 + \sin x + \sin y}$ . Arvutage  $\frac{\partial z}{\partial x}$  ja  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , kui  $x = y = 0$ .
31.  $w = \ln(1 + x + y^2 + z^3)$ . Leidke  $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$  punktis  $x = y = z = 1$
32.  $z = \ln(x^2 - y^2)$ ; tõestage, et  $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{2}{x + y} = 0$
33. On antud funktsioon  $z = xy + x \arctan \frac{y}{x}$ . Tõestage, et  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$ .
34. Leidke funktsiooni  $z = \arcsin \frac{x}{y}$  täisdiferentsiaali avaldis.
35. Leidke funktsiooni  $z = \sin \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x}$  täisdiferentsiaali avaldis.
36. Leidke funktsiooni  $z = \ln \sin \frac{x}{y}$  täisdiferentsiaali avaldis.
37. Leidke funktsiooni  $w = x^{yz}$  täisdiferentsiaali avaldis.
38. Arvutage funktsiooni  $z = \frac{xy}{x^2 - y^2}$  täisdiferentsiaali väärtus, kui  $x = 2$ ,  $y = 1$ ,  $\Delta x = 0,01$  ja  $\Delta y = 0,03$ .
39. Arvutage funktsiooni  $z = \frac{x + y}{x - y}$  täismuudu  $\Delta z$  ja täisdiferentsiaali  $dz$  väärtused, kui  $x = -3$ ,  $y = 7$ ,  $\Delta x = -\frac{1}{3}$  ja  $\Delta y = \frac{1}{4}$ .
40. Arvutage funktsiooni  $z = xy + \frac{x}{y}$  täismuudu  $\Delta z$  ja täisdiferentsiaali  $dz$  väärtused, kui  $x$  muutub väärtusest  $-1$  väärtuseks  $-0,8$  ja  $y$  väärtusest  $2$  väärtuseks  $2,2$ .
41. Arvutage funktsiooni täisdiferentsiaali abil ligikaudu  $1,96^3 \cdot 2,03^5$ .
42. Arvutage funktsiooni täisdiferentsiaali abil ligikaudu  $\frac{\sqrt{82}}{\sqrt[3]{28}}$ .
43. Arvutage funktsiooni täisdiferentsiaali abil ligikaudu  $\arcsin \frac{\sqrt{1,04}}{2,04}$ .
44. Arvutage funktsiooni täisdiferentsiaali abil ligikaudu  $\ln(\sqrt[5]{0,98} + \sqrt[4]{1,04} - 1)$ .

45. Leidke  $\frac{dy}{dx}$ , kui  $x^2y^2 - x^4 - y^4 = a^2$ .
46. Leidke  $\frac{dy}{dx}$ , kui  $2y^3 + 3x^2y + \ln x = 0$  ja arvutage selle väärtus, kui  $x = 1$ .
47. Leidke  $\frac{dy}{dx}$ , kui  $y = \sqrt{x} \ln \frac{x}{y}$  ja arvutage selle väärtus punktis  $(e^2; e)$ .
48. Leidke  $\frac{dy}{dx}$ , kui  $x^y = y^x$  ja arvutage selle väärtus punktis  $(1; 1)$ .
49. Leidke  $\frac{\partial z}{\partial x}$  ja  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , kui  $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$ .
50. Leidke  $\frac{\partial z}{\partial x}$  ja  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , kui  $z = \cos xy - \sin xz$  ning arvutage nende väärtused punktis  $(\frac{\pi}{2}; 1; 0)$ .
51. Leidke  $\frac{\partial z}{\partial x}$  ja  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , kui  $xyz = e^z$  ning arvutage nende väärtused punktis  $(e^{-1}; -1; -1)$ .
52. Leidke funktsiooni  $z$  täisdiferentsiaali avaldis, kui  $z$  on määratud võrrandiga  $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$ .
53. Leidke  $\frac{dz}{dx}$ , kui  $z = \arctan(xy + 1)$  ja  $y = \ln x$ .
54. Leidke  $\frac{dz}{dx}$ , kui  $z = \arcsin \frac{x}{y}$  ja  $y = \sqrt{x^2 + 4}$ .
55. Leidke  $\frac{dz}{dt}$ , kui  $z = \tan(3t + 2x^2 - y)$ ,  $x = \frac{1}{t}$  ja  $y = \sqrt{t}$ .
56. Leidke  $\frac{du}{dx}$ , kui  $u = \frac{e^{2x}}{5}(y - z)$ ,  $y = 2 \sin x$  ja  $z = \cos x$ .
57. Leidke  $\frac{dw}{dx}$ , kui  $w = \sqrt{x^2 + u^2 + v^2}$ ,  $u = \sin x$  ja  $v = e^x$ .
58. Leidke  $\frac{dz}{dt}$ , kui  $z = \arcsin \frac{y}{x}$ ,  $x = \sin t$  ja  $y = t^2$ .
59. Leidke  $\frac{\partial z}{\partial u}$  ja  $\frac{\partial z}{\partial v}$ , kui  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $x = u \cos v$  ja  $y = v \cos u$ .

60. Leidke  $\frac{\partial z}{\partial u}$  ja  $\frac{\partial z}{\partial v}$ , kui  $z = \ln(x^2 + y^2)$ ,  $x = u \operatorname{ch} v$  ja  $y = v \operatorname{sh} u$ .
61. Leidke funktsiooni  $z = \arctan uv$  osatuletised  $\frac{\partial z}{\partial x}$  ja  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , kui  $u = xy$  ja  $v = x - y$ .
62. Tõestage, et  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ , kui  $z = e^x(\cos y + x \sin y)$ .
63. Leidke  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  ja  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ , kui  $z = \arcsin(xy)$ .
64. Leidke  $\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z}$ , kui  $w = e^{xyz}$ .
65. Arvutage funktsiooni  $z = \frac{x}{y^2}$  kõik teist järku osatuletised punktis  $(-1; -2)$ .
66. Arvutage funktsiooni  $z = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  kõik teist järku osatuletised punktis  $(1; -2)$ .
67. Arvutage
- $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2$$
- punktis  $(0; -2)$ , kui  $z = \frac{\cos x^2}{y}$ .
68. On antud funktsioon  $z = \ln(e^x + e^y)$ . Tõestage, et  $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$  ja
- $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0.$$
69. Tõestage, et funktsioon  $z = \frac{x^2 y^2}{x + y}$  rahuldab võrrandit
- $$x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2 \frac{\partial z}{\partial x}$$
70. Koostage joone  $x = 1 + \sin t$ ,  $y = 2t - \cos t$ ,  $z = 3 + t^2$  puutuja kanoonilised võrrandid punktis, kus  $t = 0$ .

71. Koostage krüvijoone  $x = 2 \cos t$ ,  $y = 2 \sin t$ ,  $z = 4t$  puutuja kanoonilised võrrandid punktis, kus  $t = \frac{\pi}{4}$ .
72. Koostage joone  $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$ ,  $z = 4 \sin \frac{t}{2}$  puutuja kanoonilised võrrandid punktis  $\left(\frac{\pi}{2} - 1; 1; 2\sqrt{2}\right)$ .
73. Leidke joonel  $y = x^2$ ,  $z = x^3$  punktid, milles puutuja on paralleelne tasandiga  $x + 2y + z = -1$ .
74. Koostage pinna  $z = \arctan \frac{y}{x}$  puutujatasandi ja normaali võrrandid punktis  $\left(2; -2; -\frac{\pi}{4}\right)$ .
75. Koostage pinna  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  puutujatasandi ja normaali võrrandid punktis  $(3; -4; 5)$ .
76. Koostage pinna  $z = \cos \frac{y}{x}$  puutujatasandi ja normaali võrrandid punktis  $(-1; -\pi; -1)$ .
77. Leidke pinna  $x^2y^2 + 2x + z^3 = 16$  puutujatasandi ja normaali võrrandid punktis  $x = 2$  ja  $y = 1$ .
78. Näidake, et pindadel  $x + 2y - \ln z = -4$  ja  $x^2 - xy - 8x + z = -5$  on ühine puutujatasand punktis  $(2; -3; 1)$ .
79. Leidke funktsiooni  $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$  gradient punktis  $(3; 4)$ .
80. Leidke punktid, milles skalaarvälja  $z = \ln \left(x + \frac{1}{y}\right)$  gradiendiks on vektor  $\vec{a} = \left(1; -\frac{16}{9}\right)$ .
81. Leidke funktsiooni  $w = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$  gradient punktis  $(1; 1; 2)$ .
82. Leidke funktsiooni  $z = \arctan \frac{y}{x} - \frac{4y}{x}$  tuletis punktis  $(1; \sqrt{3})$  suunas, mis viib sealt punkti  $(2; 3\sqrt{3})$ .
83. Leidke funktsiooni  $w = xyz$  tuletis punktis  $A(-2; 1; 3)$  vektori  $\vec{s} = (4; 3; 12)$  suunas.

84. Leidke funktsiooni  $w = x^2y^2 - z^2 + 2xyz$  tuletis punktis  $B(1; 1; 0)$  suunas, mis moodustab koordinaattelgedega vastavalt nurgad  $60^\circ$ ,  $45^\circ$  ja  $60^\circ$ .
85. Leidke funktsiooni  $z = \ln(x^2 + y^2)$  suurim kasvukiirus punktis  $C(-3; 4)$
86. Leidke võrrandiga  $x^2 + y^3 - z^2 - 1 = 0$  määratud funktsiooni tuletise suurim väärtus punktis  $(3; 2; 4)$ .
87. Leidke pinna  $z = \arctan \frac{y}{x}$  suurim tõus punktis  $(1; 1)$ .
88. Millise vektori suunas muutub funktsioon  $f(x, y, z) = x \sin z - y \cos z$  koordinaatide alguspunktis kõige kiiremini?
89. Leidke vektorvälja  $\vec{F} = \left( \frac{x}{y}; \frac{y}{z}; \frac{z}{x} \right)$  divergents ja rootor.
90. Leidke vektorvälja  $\vec{F} = (\ln(x^2 - y^2); \arctan(z - y); xyz)$  divergents ja rootor.
91. Leidke vektorvälja  $\vec{F} = \text{grad } w$ , kus  $w = \ln(x + y - z)$ , divergents ja rootor.
92. Leidke vektorvälja  $\vec{F} = \text{rot } \vec{G}$ , kus  $\vec{G} = (x^2y; y^2z; x^2z)$ , divergents ja rootor.
93. Leidke funktsiooni  $z = 4x^2 - xy + 9y^2 + x - y$  lokaalsed ekstreemumid ja määrake nende liik.
94. Leidke funktsiooni  $z = x^3y^2(12 - x - y)$  lokaalsed ekstreemumpunktid, mis rahuldavad tingimusi  $x > 0$  ja  $y > 0$  ja määrake ekstreemumi liik.
95. Leidke funktsiooni  $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  lokaalsed ekstreemumid ja määrake nende liik.
96. Leidke funktsiooni  $z = e^x(x^2 + y^2)$  lokaalsed ekstreemumid ja määrake nende liik.
97. Leidke funktsiooni  $z = x^3 + y^3 - 3xy$  lokaalsed ekstreemumid ja määrake nende liik.
98. Leidke funktsiooni  $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$  suurim ja vähim väärtus ristkülikus külgedega  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$  ja  $y = 2$ .
99. Leidke funktsiooni  $z = x^2 - y^2$  suurim ja vähim väärtus ringis  $x^2 + y^2 \leq 4$ .

100. Leidke funktsiooni  $z = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$  suurim ja vähim väärtus ruudus  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ .
101. Leidke funktsiooni  $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  ekstremaalsed väärtused lisatingimusel  $x + y = 2$ .
102. Leidke funktsiooni  $z = a \cos^2 x + b \cos^2 y$  ekstreemumpunkt lisatingimusel  $y - x = \frac{\pi}{4}$ .
103. Leidke funktsiooni  $w = x + y + z$  ekstreemumpunktid lisatingimusel  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ .
104. Risttahuka ühte tippu läbivate servade summa on 1 m. Leidke risttahuka mõõtmed, et selle ruumala oleks maksimaalne.
105. Leidke parabolil  $y = 3x^2 - 2$  punkt, mis on lähim punktile  $P_0(0; 2)$ .
106. Tasandil  $3x - 2z = 0$  leidke punkt, mille kauguste punktidest  $A(1; 1; 1)$  ja  $B(2; 3; 4)$  ruutude summa oleks vähim.
107. Arvutage kahekordne integraal  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ , kui  $D$  on ruut  $0 \leq x \leq 1$  ja  $1 \leq y \leq 2$ .
108. Arvutage kahekordne integraal  $\iint_D \frac{dx dy}{(x+y)^2}$ , kui  $D$  on ruut  $1 \leq x \leq 2$  ja  $3 \leq y \leq 4$ .
109. Arvutage kahekordne integraal  $\int_1^2 dx \int_x^{x\sqrt{3}} xy dy$ .
110. Arvutage kahekordne integraal  $\int_0^1 dx \int_{-x}^{x+1} (xy + y) dy$ .
111. Arvutage kahekordne integraal  $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2) dy$ .



112. Tehke integreerimispiirkonna joonis ja määrake rajad kahekordses integraalis  $\iint_D f(x; y) dx dy$ , kui  $D$  on joontega  $y = 0$  ja  $y = 1 - x^2$  piiratud piirkond.
113. Tehke integreerimispiirkonna joonis ja määrake rajad kahekordses integraalis  $\iint_D f(x; y) dx dy$ , kui  $D$  on sirgetega  $y = 0$ ,  $y = a$ ,  $y = x$  ja  $y = x - 2a$  piiratud piirkond.
114. Tehke integreerimispiirkonna joonis ja määrake rajad kahekordses integraalis  $\iint_D f(x; y) dx dy$ , kui  $D$  on joontega  $y = \frac{2}{1+x^2}$  ja  $y = x^2$  piiratud piirkond.
115. Tehke integreerimispiirkonna joonis ja muutke integreerimise järjekorda kahekordses integraalis  $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x; y) dy$ .
116. Tehke integreerimispiirkonna joonis ja muutke integreerimise järjekorda kahekordses integraalis  $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{x+1} f(x; y) dy$ .
117. Tehke integreerimispiirkonna joonis ja muutke integreerimise järjekorda kahekordses integraalis  $\int_{-2}^2 dy \int_{y^2-2}^{\frac{y^2}{2}} f(x; y) dx$ .
118. Tehke integreerimispiirkonna joonis ja muutke integreerimise järjekorda kahekordses integraalis  $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^{x^2+2} f(x; y) dy$ .
119. Muutes integreerimise järjekorda, esitage ühe kahekordse integraali abil summa  $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 f(x; y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_0^{y+1} f(x; y) dx$ .

120. Tehke integreerimispiirkonna joonis, määrake rajad ja arvutage kahekordne integraal  $\iint_D (x-2y)dxdy$ , kui piirkond  $D$  on määratud võrratustega  $-1 \leq x \leq 2$  ja  $0 \leq y \leq x^2 + 1$ .
121. Tehke integreerimispiirkonna joonis, määrake rajad ja arvutage kahekordne integraal  $\iint_D (x^2 + y^2)dxdy$ , ku  $D$  on sirgetega  $y = x$ ,  $x + y = 2a$  ja  $x = 0$  piiratud piirkond.
122. Tehke integreerimispiirkonna joonis, määrake rajad ja arvutage kahekordne integraal  $\iint_D xydxdy$ , ku  $D$  on vähim segmentidest, milleks sirge  $x + y = 2$  jaotab ringi  $x^2 + y^2 \leq 2y$ .
123. Tehke integreerimispiirkonna joonis, määrake rajad ja arvutage kahekordne integraal  $\iint_D e^{x+y}dxdy$ , ku  $D$  on joontega  $y = e^x$ ,  $x = 0$  ja  $y = 2$  piiratud piirkond.
124. Teisendage polaarkoordinaatidesse kahekordne integraal  $\iint_D f(x; y)dxdy$ , kui integreerimispiirkond  $D$  on määratud võrratustega  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$  ja  $y \geq 0$ .
125. Teisendage polaarkoordinaatidesse kahekordne integraal  $\iint_D f(x; y)dxdy$ , kui integreerimispiirkond  $D$  on piiratud ringjoontega  $x^2 + y^2 = 4x$  ja  $x^2 + y^2 = 8x$  ning sirgetega  $y = x$  ja  $y = 2x$ .
126. Teisendage polaarkoordinaatidesse kahekordne integraal  $\int_{\frac{R}{2}}^{2R} dy \int_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x; y)dx$ .
127. Arvutage polaarkoordinaatide abil kahekordne integraal  $\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{x^2+y^2} dy$ .

128. Arvutage polaarkoordinaatide abil kahekordne integraal  $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$ ,  
kui  $D$  on määratud tingimustega  $x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ .
129. Arvutage polaarkoordinaatide abil kahekordne integraal  $\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \ln(1 + x^2 + y^2) dy$ .
130. Arvutage polaarkoordinaatide abil kahekordne integraal  $\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy$ ,  
kui  $D$  on ring  $x^2 + y^2 \leq Rx$ .
131. Arvutage polaarkoordinaatide abil kahekordne integraal  $\iint_D x \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ ,  
kui  $D$  on lemniskaadiga  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$  piiratud piirkond, kus  
 $x \geq 0$ .
132. Arvutage kolmekordne integraal  $\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^3 y^2 z dz$ .
133. Arvutage kolmekordne integraal  $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(x + y + z + 1)^3}$ , kui  $V$  on ta-  
sanditega  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  ja  $x + y + z = 1$  piiratud piirkond.
134. Arvutage kolmekordne integraal  $\iiint_V xyz dx dy dz$ , kui  $V$  on pindadega  
 $y = x^2$ ,  $x = y^2$ ,  $z = xy$  ja  $z = 0$  piiratud piirkond.
135. Teisendage silinderkoordinaatidesse kolmekordne integraal  $\iiint_V f(x; y; z) dx dy dz$ ,  
kui piirkond  $V$  on piiratud pindadega  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x^2 + y^2 = 4$   
ja  $z = x^2 + y^2$ .
136. Arvutage silinderkoordinaatide abil kolmekordne integraal

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^1 \frac{dz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

137. Arvutage silinderkoordinaatide abil kolmekordne integraal  $\iiint_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$ ,  
 kui piirkond  $V$  on määratud võrratustega  $0 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq z \leq 3$  ja  
 $0 \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}$ .

138. Teisendage sfäärkoordinaatidesse kolmekordne integraal  $\iiint_V f(x;y;z)dxdydz$ ,  
 kui integreerimispiirkond  $V$  on määratud võrratustega  
 $1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4$ ,  $z \geq 0$  ja  $y \leq 0$ .

139. Arvutage sfäärkoordinaatide abil kolmekordne integraal

$$\int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

140. Arvutage sfäärkoordinaatide abil kolmekordne integraal  $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$ ,  
 kui integreerimispiirkond  $V$  on määratud võrratustega  $0 \leq y \leq 1$ ,  
 $0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$  ja  $0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}$ .

141. Arvutage joontega  $xy = 4$  ja  $x + y = 5$  piiratud piirkonna pindala.

142. Eeldusel, et  $a$  on positiivne konstant, arvutage joontega  $y = \frac{8a^3}{x^2+4a^2}$ ,  
 $x = 2y$  ja  $x = 0$  piiratud piirkonna pindala.

143. Arvutage tasanditega  $z = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y = x$  ja  $x = 2$  ning pöördparaboloidiga  
 $z = x^2 + y^2$  piiratud keha ruumala.

144. Arvutage hüperboolse paraboloidiga (sadulpinnaga)  $z = x^2 - y^2$  ning  
 tasanditega  $z = 0$  ja  $x = 3$  piiratud keha ruumala.

145. Arvutage pindadega  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = 2(x^2 + y^2)$ ,  $y = x$  ja  $y^2 = x$   
 piiratud keha ruumala.

146. Arvutage sfääriga  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  ja pöördparaboloidiga  $3z = x^2 + y^2$   
 piiratud keha ruumala.

147. Arvutage võrratustega  $y \geq 0$ ,  $y \leq x$ ,  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$  ja  $0 \leq z \leq$   
 $x^2 + y^2 + 1$  määratud kujundi ruumala.

148. Arvutage võrratustega  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  ja  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$  määratud kujundi ruumala.
149. Arvutage joonintegraal  $\int_L (x^2 + y^2) ds$ , kui  $L$  on punkte  $A(1; 1)$  ja  $B(4; 4)$  ühendav sirglõik.
150. Arvutage  $\int_L y^2 ds$ , kui  $L$  on punktide  $O(0; 0)$  ja  $C(2a\pi; 0)$  vaheline tsükloidi  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  kaar.
151. Arvutage  $\int_L (x^2 + y^2 + z) ds$  mööda krüvijoont  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = bt$  punktist, milles  $t = 0$  punktini, milles  $t = 2\pi$
152. Arvutage  $\int_L xyz ds$ , kui  $L$  on veerand ringjoont  $x = \frac{R}{2} \cos t$ ,  $y = \frac{R}{2} \sin t$ ,  $z = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ , mis asub esimeses oktandis.
153. Arvutage  $\int_L \frac{y dx + x dy}{x^2 + y^2}$ , kui  $L$  on sirge  $y = x$  lõik punktist  $(1; 1)$  punktini  $(2; 2)$ .
154. Arvutage  $\int_L \arctan \frac{y}{x} dy - dx$ , kui  $L$  on parabooli  $y = x^2$  kaar punktist  $O(0; 0)$  punktini  $A(1; 1)$ .
155. Arvutage  $\int_{AB} (x + y) dx + (x - y) dy$  üle ellipsi  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$  kaare punktist  $A(a; 0)$  punktini  $B(0; b)$ .
156. Arvutage  $\int_L x dy - y dx$ , kui  $L$  on astroidi  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$  kaar punktist, kus  $t = 0$  punktini, kus  $t = \frac{\pi}{2}$ .
157. Arvutage  $\int_L \frac{x}{y} dx + \frac{dy}{y - 1}$ , kui  $L$  on tsükloidi  $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$  kaar punktist  $t = \frac{\pi}{6}$  punktini  $t = \frac{\pi}{3}$ .

158. Arvutage  $\int_{AB} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - x - y + 2z}}$  punktist  $A(1; 1; 1)$  punktini  $B(4; 4; 4)$  tõmmatud sirglõiku mööda.
159. Arvutage  $\int_L yzdx + xzdy + xydz$ , kui  $L$  on krüvijoone  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = bt$  kaar parameetri  $t$  muutumisel 0-st  $2\pi$ -ni.
160. Teisendage Greeni valemi abil joonintegraal  $\oint_L (1-x^3)ydx + x(1+y^3)dy$  kahekordseks integraaliks üle piirkonna  $D$ , kui  $L$  positiivses suunas läbitav kinnine sile joon, mis piirab piirkonda  $D$ .
161. Teisendage Greeni valemi abil joonintegraal  $\oint_L e^x(1-\cos y)dx + e^x(\sin y + y)dy$  kahekordseks integraaliks üle piirkonna  $D$ , kui  $L$  positiivses suunas läbitav kinnine sile joon, mis piirab piirkonda  $D$ .
162. Arvutage Greeni valemi abil  $\oint_L (x+y^2)dx + (x+y)^2dy$ , kui  $L$  on kolmnurga  $ABC$  kontuur tippudega  $A(1; 0)$ ,  $B(1; 1)$  ja  $C(0; 1)$ .
163. Arvutage Greeni valemi abil  $\oint_L (5x - 3y)dx + (x - 4y)dy$ , kui  $L$  on positiivses suunas läbitav ringjoon  $x^2 + y^2 = 1$ .
164. Arvutage Greeni valemi abil  $\oint_L 2xydx + x^2dy$ , kui  $L$  on positiivses suunas läbitav ruudu  $|x| + |y| = 1$  rajajoon.
165. Arvutage Greeni valemi abil  $\oint_L xy^2dy - x^2ydx$ , kui  $L$  on positiivses suunas läbitav ringjoon  $x^2 + y^2 = 5$ .
166. Leidke funktsioon  $u$ , kui selle täisdiferentsiaal on  $du = x^2dx + y^2dy$ .
167. Leidke funktsioon  $u$ , kui selle täisdiferentsiaal on  $du = (\cos y - 2xe^y)dx - (x^2e^y + x \sin y)dy$ .
168. Arvutage  $\int_{(0;0)}^{(2;1)} 2xydx + x^2dy$ .

169. Arvutage  $\int_{(-1;2)}^{(2;3)} ydx + xdy$ .
170. Arvutage  $\int_{(1;1)}^{(2;2)} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .
171. Arvutage  $\iint_S (x + y + z)d\sigma$ , kui  $S$  on esimeses oktandis paiknev tasandi  $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + z = 1$  osa.
172. Arvutage  $\iint_S (x^2 + y^2)d\sigma$ , kui  $S$  on koonuse  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  tükk, mille lõikab temast välja silinder  $x^2 + y^2 = 1$ .
173. Arvutage  $\iint_S \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}d\sigma$ , kui  $S$  on poolsfäär  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ .
174. Arvutage  $\iint_S \sqrt{1 + x^2 + y^2}d\sigma$ , kui  $S$  on sadulpinna  $z = xy$  see tükk, mille lõikab temast välja silinder  $x^2 + y^2 = 1$ .
175. Arvutage  $\iint_S xdydz + ydxdz + zdxdy$ , kui  $S$  on tasandi  $x + y + z = 1$  esimeses oktandis paiknev osa, kus normaal moodustab koordinaattelgedega teravnurgad.
176. Arvutage  $\iint_S x^2y^2zdx dy$ , kui  $S$  on poolsfääri  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  ülemine pinnapool.
177. Arvutage  $\iint_S xyzdz dy$ , kui  $S$  on tasandi poolsfääri  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  alumine pinnapool.
178. Arvutage  $\iint_S xzdx dy + xydy dz + yzdx dz$ , kui  $S$  on tasanditega  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  ja  $x + y + z = 1$  määratud püramiidi seesmine pinnapool.

179. Kirjutage rea  $\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \left(\frac{3}{8}\right)^5 + \dots$  üldliikme avaldis.
180. Kirjutage rea  $1 - \frac{2}{7} + \frac{3}{13} - \frac{4}{19} + \dots$  üldliikme avaldis.
181. Kasutades võrdust  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ , leidke rea  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \dots$   $n$ -es osasumma ja summa.
182. Leidke rea  $\frac{1}{3 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 12} + \dots + \frac{1}{3k(3k+3)} + \dots$   $n$ -es osasumma ja summa.
183. Leidke rea  $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} + \sqrt{k})$   $n$ -es osasumma ja summa.
184. Uurige rea  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{5 + 3^k}$  koonduvust võrdlustunnuse abil.
185. Uurige rea  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k^3 - 1)^{\frac{1}{3}}}$  koonduvust võrdlustunnuse abil.
186. Uurige rea  $1 + \frac{3}{2!} + \frac{6}{3!} + \frac{12}{4!} + \dots + \frac{3 \cdot 2^{n-2}}{n!} + \dots$  koonduvust D'Alembert'i tunnuse abil.
187. Uurige rea  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!}$  koonduvust D'Alembert'i tunnuse abil.
188. Uurige rea  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{(3k+1)!}$  koonduvust D'Alembert'i tunnuse abil.
189. Uurige rea  $\sum_{k=1}^{\infty} \arcsin^k \frac{2k-1}{4k+3}$  koonduvust Cauchy tunnuse abil.
190. Uurige rea  $\sum_{k=1}^{\infty} \ln^k \frac{2k+3}{k+1}$  koonduvust Cauchy tunnuse abil.
191. Uurige rea  $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{-k^2}$  koonduvust Cauchy tunnuse abil.



192. Uurige rea  $\frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{3k+1} + \dots$  koonduvust integraaltunnuse abil.

193. Uurige rea  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$  koonduvust integraaltunnuse abil.

194. Uurige rea  $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots$  koonduvust Leibnizi tunnuse abil.

195. Uurige rea  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{k^3}$  koonduvust Leibnizi tunnuse abil.

196. Kas rida

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots$$

koondub tingimisi või absoluutselt?

197. Kas rida

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \frac{1}{(2)^n} + \dots$$

koondub tingimisi või absoluutselt?

198. Kas rida

$$\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \dots + (-1)^n \frac{1}{\ln n} + \dots$$

koondub tingimisi või absoluutselt?

Ülesannetes 199. - 203. leidke  $x$  väärtused, mille korral funktsionaalrida koondub.

199.  $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \dots + \frac{x^n}{2^n} + \dots$

200.  $x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n^2} + \dots$

201.  $\sin x + 2 \sin \frac{x}{3} + 4 \sin \frac{x}{9} + \dots + 2^n \sin \frac{x}{3^n} + \dots$

202.  $\frac{x}{1 + \sqrt{1}} + \frac{x^2}{2 + \sqrt{2}} + \frac{x^3}{3 + \sqrt{3}} + \dots + \frac{x^n}{n + \sqrt{n}} + \dots$

$$203. \sum_{k=0}^{\infty} \ln^k(ex).$$

Ülesannetes 204. - 206. määrake, kas rida on antud lõigul majoreeruv.

$$204. 1 + \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \dots + \frac{x^n}{n^2} + \dots \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$205. 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$206. \frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \dots + \frac{\sin nx}{n^2} + \dots \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Ülesannetes 207. -210. leidke astmerea koorduvusraadius ja koorduvuspiirkond.

$$207. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{k(k+1)}.$$

$$208. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(kx)^k}{k!}.$$

$$209. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(x-2)^k}{3^k}.$$

$$210. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k(x+3)^k}{k!}.$$

Ülesannetes 211. - 216. arendage funktsioon astmerekaks  $x$  astmete järgi ja määrake saadud rea koorduvuspiirkond.

$$211. f(x) = \frac{1}{10+x}.$$

$$212. f(x) = e^{-x}.$$

$$213. f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$214. f(x) = \operatorname{sh} x.$$

$$215. f(x) = \cos^2 x.$$

216.  $f(x) = \arctan x$  (Märkus: integreerige ülesande 213. tulemust rajades 0-st  $x$ -ni).

Ülesannetes 217. - 221. arendage etteantud poollõigul defineeritud  $2\pi$ -perioodiline funktsioon Fourier' reaks.

$$217. f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$218. f(x) = x, \text{ kui } -\pi < x \leq \pi.$$

$$219. f(x) = x^2, \text{ kui } -\pi < x \leq \pi.$$

$$220. f(x) = \sin ax, \text{ kui } -\pi < x \leq \pi.$$

$$221. f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \text{ kui } 0 < x \leq 2\pi.$$

## Vastused

**9.** ei ole, sest esimene on määratud ka juhul  $x \leq 0$  ja  $\sin y \leq 0$ .      **10.** ei ole, sest esimene on määratud ka juhul  $x < 0$  ja  $y < 0$ .      **11.** 0; -1; ei eksisteeri.

**12.** 2.      **13.** 0.      **14.** Ei eksisteeri.      **15.** 0.      **16.** Ei eksisteeri.

**17.** 0.      **18.**  $2x\sqrt[3]{y} + \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt[4]{y}}; \frac{x^2}{3\sqrt[3]{y^2}} - \frac{\sqrt{x}}{4y\sqrt[4]{y}}$ .      **19.**  $\frac{2}{y \sin \frac{2x}{y}}; -\frac{2x}{y^2 \sin \frac{2x}{y}}$ .

**20.**  $-\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}; \frac{x}{y^2}e^{-\frac{x}{y}}$ .      **21.**  $y \cos xy - \frac{y}{x^2} \sin \frac{y}{x}$ ;  $x \cos xy + \frac{1}{x} \sin \frac{y}{x}$ .

**22.**  $\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^x}}; \frac{y}{(x + \sqrt{x^2 + y^x})\sqrt{x^2 + y^x}}$ .      **23.**  $-\frac{y}{2\sqrt{x}(x + y^2)}; \frac{\sqrt{x}}{x + y^2}$ .

**24.**  $y \ln(x + y) + \frac{xy}{x + y}; x \ln(x + y) + \frac{xy}{x + y}$ .      **25.**  $\frac{y}{xy + \ln z}; \frac{x}{xy + \ln z}; \frac{1}{z(xy + \ln z)}$ .      **26.**  $\frac{2x}{\cos^2(x^2 + y^3 + z^4)}; \frac{3y^2}{\cos^2(x^2 + y^3 + z^4)}$ ;

$\frac{1}{\cos^2(x^2 + y^3 + z^4)}$ .      **27.**  $y^z x^{y^z - 1}; x^{y^z} \ln x \cdot z y^{z-1}; x^{y^z} \ln x \cdot y^z \ln y$ .      **28.**

$2x \cdot \frac{1 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2 + y^2}}{(1 + \sqrt{x^2 + y^2})^2}; 2y \cdot \frac{1 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2 + y^2}}{(1 + \sqrt{x^2 + y^2})^2}$ .      **29.**  $\frac{2}{5}; \frac{1}{5}$ .

**30.** 1; -1.      **31.**  $\frac{3}{2}$ .      **34.**  $dz = \frac{ydx - xdy}{|y|\sqrt{y^2 - x^2}}$ .      **35.**  $dz = \left(x^2 \cos \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x} + y^2 \sin \frac{x}{y} \sin \frac{y}{x}\right)$

**36.**  $dz = \frac{ydx - xdy}{y^2 \tan \frac{x}{y}}$ .      **37.**  $dw = x^{yz} \left(\frac{yzdx}{x} + z \ln x dy + y \ln x dz\right)$ .

**38.**  $\frac{1}{36}$ .      **39.**  $\Delta z = \frac{19}{635}; dz = \frac{19}{600}$ .      **40.**  $\Delta z \approx 0,3764; dz = 0,35$ .  
**41.** 259,84.      **42.**  $2\frac{53}{54}$ .      **43.**  $\frac{\pi}{6}$ .      **44.** 0,006.      **45.**  $\frac{x(2x^2 - y^2)}{y(x^2 - 2y^2)}$ .  
**46.**  $-\frac{1}{3}$ .      **47.**  $\frac{3}{4e}$ .      **48.** 1.      **49.**  $\frac{2-x}{z+1}; \frac{2y}{z+1}$ .      **50.**  $-\frac{2}{2+\pi}$ ;  
 $-\frac{\pi}{2+\pi}$ .      **51.**  $\frac{e}{2}; -\frac{1}{2}$ .      **52.**  $dz = -\frac{1}{\sin 2z}(\sin 2x dx + \sin 2y dy)$ .      **53.**  
 $\frac{1 + \ln x}{x^2 \ln^2 x + 2x \ln x + 2}$ .      **54.**  $\frac{2}{x^2 + 4}$ .      **55.**  $\frac{1}{\cos^2(3t + \frac{2}{t^2} - \sqrt{t})} \left(3 - \frac{4}{t^3} - \frac{1}{2\sqrt{t}}\right)$ .  
**56.**  $e^{2x} \sin x$ .      **57.**  $\frac{x + u \cos x + v e^x}{\sqrt{x^2 + u^2 + v^2}}$ .      **58.**  $\frac{t(2 - t \cos t) |\sin t|}{\sin t \sqrt{\sin^2 t - t^4}}$ .      **59.**  
 $\frac{u \cos^2 v - v^2 \sin u \cos u}{\sqrt{u^2 \cos^2 v + v^2 \cos^2 u}}$ ;  $\frac{v \cos^2 u - u^2 \sin v \cos v}{\sqrt{u^2 \cos^2 v + v^2 \cos^2 u}}$ .      **60.**  $\frac{2}{u}; \frac{4 \operatorname{sh} v \operatorname{ch} v}{\operatorname{sh}^2 v + \operatorname{ch}^2 v}$ .  
**61.**  $\frac{y(2x - y)}{1 + x^2 y^2 (x - y)^2}; \frac{x(x - 2y)}{1 + x^2 y^2 (x - y)^2}$ .      **63.**  $\frac{xy^3}{(1 - x^2 y^2) \sqrt{1 - x^2 y^2}}; \frac{x^3 y}{(1 - x^2 y^2) \sqrt{1 - x^2 y^2}}$ .  
 $\frac{1}{(1 - x^2 y^2) \sqrt{1 - x^2 y^2}}$ ;      **64.**  $e^{xyz}(1 + 3xyz + x^2 y^2 z^2)$ .      **65.**  $0; \frac{1}{4}; -\frac{3}{8}$ .  
**66.**  $-\frac{4}{25}; \frac{3}{25}; \frac{4}{25}$ .      **67.** 0.      **70.**  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{0}$ .      **71.**  
 $\frac{x - \sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = \frac{y - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{z - \pi}{4}$ .      **72.**  $\frac{x - \frac{\pi}{2} + 1}{1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ .  
**73.**  $(-1; 1; -1); \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; -\frac{1}{27}\right)$ .      **74.**  $x + y - 4z = \pi. \frac{x-2}{\frac{1}{4}} = \frac{y+2}{\frac{1}{4}} =$   
 $\frac{z + \frac{\pi}{4}}{-1}$ .      **75.**  $3x - 4y - 5z = 0; \frac{x-3}{\frac{5}{3}} = \frac{y+4}{-\frac{5}{4}} = \frac{z-5}{-1}$ .      **76.**  
 $z + 1 = 0; \frac{x+1}{0} = \frac{y+\pi}{0} = \frac{z+1}{-1}$ .      **77.**  $3x + 4y + 6z - 22 =$   
 $0; \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{6}$ .      **79.**  $\left(2; -2\frac{1}{4}\right)$ .      **80.**  $\left(-\frac{1}{3}; \frac{3}{4}\right)$ ;  
 $\left(\frac{7}{3}; -\frac{3}{4}\right)$ .      **81.**  $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ .      **82.**  $-\frac{15}{4} \sqrt{\frac{3}{13}}$ .      **83.**  $-\frac{30}{13}$ .  
**84.**  $2 + \sqrt{2}$ .      **85.** 0,4;      **86.**  $\frac{3\sqrt{5}}{4}$ ;      **87.**  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .      **88.**  $(0; -1; 0)$ .  
**89.**  $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}; \operatorname{rot} \vec{F} = \left(\frac{y}{z^2}; \frac{z}{x^2}; \frac{x}{y^2}\right)$ .      **90.**  $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{2x}{x^2 - y^2} -$   
 $\frac{1}{1 + (z - y)^2} + xy; \operatorname{rot} \vec{F} = \left(xz - \frac{1}{1 + (z - y)^2}; -yz; \frac{2y}{x^2 - y^2}\right)$ .      **91.**

$$\operatorname{div} \vec{F} = -\frac{3}{(x+y-z)^2}; \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{\Theta}. \quad \mathbf{92.} \operatorname{div} \vec{F} = 0; \operatorname{rot} \vec{F} = (2x; 2x; 2y-$$

$2z).$  **93.** Punktis  $\left(-\frac{17}{143}; \frac{7}{143}\right)$  lokaalne miinimum. **94.** Punk-

tis  $(6; 4)$  lokaalne maksimum  $z_{max} = 6912$ . **95.** Punktis  $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$

lokaalne miinimum  $z_{min} = 3\sqrt[3]{3}$ . **96.** Punktis  $(-2; 0)$  ekstreemumit ei ole, punktis  $(0; 0)$  lokaalne miinimum. **97.** Punktis  $(0; 0)$  ekstreemumit ei ole, punktis  $(1; 1)$  lokaalne miinimum. **98.**  $z_{min} = z(1; 0) = -3;$

$z_{max} = z(1; 2) = 17$ . **99.**  $z_{min} = z(0; 2) = z(0; -2) = -4;$   $z_{max} = z(2; 0) = z(-2; 0) = 4$ . **100.**  $z_{min} = z(0; 0) = 0;$   $z_{max} = z\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right) =$

$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ . **101.**  $z(1; 1) = 2$ . **102.**  $\left(-\frac{1}{2} \arctan \frac{b}{a}; \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctan \frac{b}{a}\right)$ .

**103.**  $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ . **104.**  $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$  ja  $\frac{1}{3}$  m. **105.**  $\left(\sqrt{\frac{23}{18}}; \frac{11}{6}\right); \left(-\sqrt{\frac{23}{18}}; \frac{11}{6}\right)$ .

**106.**  $\left(\frac{21}{13}; 2; \frac{63}{26}\right)$ . **107.**  $\frac{8}{3}$ . **108.**  $\ln \frac{25}{24}$ . **109.**  $3\frac{3}{4}$ . **110.**  $\frac{19}{12}$ . **111.**

$\frac{6}{35}$ . **112.**  $\int_{-1}^1 dx \int_0^{1-x^2} f(x; y) dy$ . **113.**  $\int_0^a dy \int_y^{y+2a} f(x; y) dx$ . **114.**

$\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^{\frac{2}{1+x^2}} f(x; y) dy$ . **115.**  $\int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} f(x; y) dx$ . **116.**  $\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x; y) dx +$

$\int_0^2 dy \int_{y-1}^1 f(x; y) dx$ . **117.**  $\int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{x+2}}^{\sqrt{x+2}} f(x; y) dy - \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} f(x; y) dy$ .

**118.**  $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x; y) dx + \int_1^3 dy \int_{-1}^1 f(x; y) dx - \int_2^3 dy \int_{-\sqrt{y-2}}^{\sqrt{y-2}} f(x; y) dx$ . **119.**

$\int_0^1 dx \int_{x-1}^{x^2} f(x; y) dy$ . **120.**  $-10\frac{7}{20}$ . **121.**  $\frac{4}{3}a^4$ . **122.**  $\frac{1}{4}$ . **123.**  $e$ .

**124.**  $\int_0^{\pi} d\varphi \int_1^2 f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi) \rho d\rho$ . **125.**  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} d\varphi \int_{4 \cos \varphi}^{8 \cos \varphi} f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi) \rho d\rho$ .

- 126.**  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{R}{2\sin\varphi}}^{2R\sin\varphi} f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi) \rho d\rho.$       **127.**  $\frac{\pi}{4}(e^{a^2} - 1).$       **128.**  $\pi.$
- 129.**  $\frac{\pi}{4} [(1 + R^2) \ln(1 + R^2) - R^2].$       **130.**  $\frac{R^3}{3} \left( \pi - \frac{4}{3} \right).$       **131.**  $\frac{2\sqrt{2}}{15} a^4.$
- 132.**  $\frac{a^{11}}{110}.$       **133.**  $\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}.$       **134.**  $\frac{1}{96}.$       **135.**  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 d\rho \int_0^{\rho^2} f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi; z) \rho dz.$
- 136.**  $\frac{4}{3}\pi.$       **137.**  $8.$       **138.**  $\int_{\pi}^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 f(r \cos \varphi \sin \theta; r \sin \varphi \sin \theta; r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr.$
- 139.**  $\frac{8}{5}\pi R^2 \sqrt{R}.$       **140.**  $\frac{\pi}{8};$       **141.**  $\frac{1}{2}(15 - 16 \ln 2).$       **142.**
- $a^2(\pi - 1).$       **143.**  $\frac{16}{3}.$       **144.**  $27.$       **145.**  $\frac{3}{35}.$       **146.**  $\frac{19}{6}\pi.$       **147.**
- $\frac{21\pi}{16}.$       **148.**  $\frac{5\pi R^3}{12}.$       **149.**  $42\sqrt{2}.$       **150.**  $\frac{256}{15}a^3.$       **151.**
- $2\pi\sqrt{a^2 + b^2}(a^2 + \pi b).$       **152.**  $\frac{R^4\sqrt{3}}{32}.$       **153.**  $\ln 2.$       **154.**  $\frac{\pi}{2} -$
- $2.$       **155.**  $-\frac{a^2 + b^2}{2}.$       **156.**  $\frac{3\pi ab}{16}.$       **157.**  $\frac{\pi^2}{24} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \ln 3.$
- 158.**  $3\sqrt{3};$       **159.**  $0.$       **160.**  $\iint_D (x^3 + y^3) dx dy.$       **161.**
- $\iint_D e^x y dx dy.$       **162.**  $\frac{2}{3}.$       **163.**  $4\pi.$       **164.**  $0.$       **165.**  $\frac{25\pi}{2}.$
- 166.**  $u(x, y) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3) + C.$       **167.**  $u(x, y) = x \cos y - x^2 e^y +$
- $C.$       **168.**  $4.$       **169.**  $8.$       **170.**  $\sqrt{2}.$       **171.**  $\frac{\sqrt{21}}{3}.$       **172.**  $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$       **173.**
- $\pi R^3.$       **174.**  $\frac{3\pi}{2}.$       **175.**  $\frac{1}{2}.$       **176.**  $\frac{2\pi R^7}{105}.$       **177.**  $0.$       **178.**
- $-\frac{1}{8}.$       **179.**  $\left( \frac{k}{3k-1} \right)^{2k-1}.$       **180.**  $(-1)^k \frac{k}{6k-5}.$       **181.**  $S_n =$
- $1 - \frac{1}{n+1}; S = 1.$       **182.**  $S_n = \frac{1}{9} - \frac{1}{9(n+1)}; S = \frac{1}{9}.$       **183.**
- $1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}; 1 - \sqrt{2}.$       **184.** Koondub.      **185.**
- Hajub.      **186.** Koondub.      **187.** Koondub.      **188.** Koondub.
- 189.** Koondub.      **190.** Koondub.      **191.** Koondub.      **192.** Hajub.
- 193.** Koondub.      **194.** Koondub.      **195.** Koondub.      **196.** Koondub abso-

luutselt. **197.** Koondub absoluutselt. **198.** Koondub tingimisi. **199.**  
 $-2 < x < 2$ . **200.**  $-1 \leq x \leq 1$ . **201.**  $-\infty < x < \infty$ . **202.**  
 $-1 \leq x < 1$ . **203.**  $(e^{-2}; 1)$ . **204.** Majoreeruv. **205.** Mittemajoreeruv.  
**206.** Majoreeruv. **207.**  $1; [-1; 1]$ . **208.**  $e^{-1}; [-e^{-1}; e^{-1})$ . **209.**  $3;$   
 $(-1; 5)$ . **210.**  $\infty; \mathbb{R}$ . **211.**  $\frac{1}{10} - \frac{x}{100} + \frac{x^2}{10^3} - \frac{x^3}{10^4} + \dots$ , koondub, kui  
 $-10 < x < 10$ . **212.**  $1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$ , koondub, kui  $-\infty < x < \infty$ .  
**213.**  $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$ , koondub, kui  $-1 < x < 1$ . **214.**  $x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$ ,  
 koondub, kui  $-\infty < x < \infty$ . **215.**  $1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}$ , koondub, kui  
 $-\infty < x < \infty$ . **216.**  $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$ , koondub, kui  $-1 \leq x \leq$   
 1. **217.**  $\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$ . **218.**  $2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx$ . **219.**  $\frac{\pi^2}{3} +$   
 $4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kx$ . **220.**  $\frac{2 \sin a\pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{a^2 - k^2} \sin kx$ . **221.**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ .