Paljudel matemaatilistel operatsioonidel on olemas pöördoperatsioonid. Liitmise pöördoperatsi on lahutamine, korrutamise pöördoperatsiooniks jagamine, astendamise pöördoperatsiooniks juurimine. Diferentseerimise pöördoperatsiooniks on integreerimine, st funktsiooni leidmine, kui on teada selle funktsiooni tuletis (ajas kulgeva protsessi kirjeldamine, kui on teada selle protsessi kulgemise intensiivsus antud ajamomendil).

1 Määramata integraali mõiste ja omadused

Funktsiooni $f(x)$ *algfunktsiooniks* nimetatakse funktsiooni $F(x)$, mille korral $F'(x) = f(x)$. Näiteks funktsiooni x algfunktsiooniks on $\frac{x^2}{2}$, sest $(\frac{x^2}{2})' = x$, funktsiooni $\cos x$ algfunktsiooniks $\sin x$, sest $(\sin x)' = \cos x$ jne. Algfunktsioon ei ole üheselt määratud, sest peale funktsiooni $\sin x$ on $\cos x$ algfunktsioonideks ka $\sin x + 2$, $\sin x - \pi$ ja igasugune avaldis kujul $\sin x + C$, kus C on suvaline konstant.

Üldjuhul, kui funktsiooni $f(x)$ algfunktsiooniks on $F(x)$, siis on $f(x)$ algfunktsiooniks ka avaldis $F(x)+C$, kus C on suvaline konstant. Tekib küsimus, kas funktsioonil $f(x)$ on veel muid algfunktsioone, selliseid, mis ei avaldu kujul $F(x) + C$. Sellele annavad vastuse kaks järgmist lauset.

Lause 1.1. Kui $F'(x) = 0$ piirkonnas X, siis $F(x)$ on selles piirkonnas konstantne.

Tõestus. Fikseerime ühe punkti $x \in X$. Kasutades Lagrange'i teoreemi, võime suvalise muutuva Δx korral kirjutada (eeldusel, et ka $x + \Delta x \in X$), et

$$F(x + \Delta x) - F(x) = F'(\xi)\Delta x,$$

kus $\xi \in X$ on mingisugune väärtus x ja $x + \Delta x$ vahel. Et eelduse kohaselt funktsiooni $F(x)$ tuletis võrdub nulliga kogu piirkonnas X, siis ka $F'(\xi) = 0$ ja järelikult ka $F(x+\Delta x)-F(x) = 0$ ehk suvalise Δx korral $F(x + \Delta x) = F(x)$, mis sisuliselt tähendab seda, et funktsiooni väärtus piirkonna X suvalises punktis $x + \Delta x$ on võrdne funktsiooni väärtusega fikseeritud punktis x ehk funktsioon on piirkonnas X konstantne.

Lause 1.2. Kui $F(x)$ ja $G(x)$ on kaks erinevat funktsiooni $f(x)$ algfunktsiooni, siis nad erinevad teineteisest mitte rohkem kui konstandi võrra.

Tõestus. Eelduse kohaselt $F'(x) = f(x)$ ja $G'(x) = f(x)$. Seega

$$[G(x) - F(x)]' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

ja lausest 1 järeldub, et $G(x) - F(x) = C$, kus C on suvaline konstant, ehk $G(x) = F(x) + C$ ja lause 2 väide on tõestatud.

Kogu eelneva võib kokku võtta järgmiselt: kui funktsioon $F(x)$ on funktsiooni $f(x)$ algfunktsiooniks, siis on selleks ka avaldis $F(x) + C$, kus C on suvaline konstant ja muul kujul algfunktsioone funktsioonil $f(x)$ ei ole. See asjaolu annab aluse järgmiseks definitsiooniks.

Definitsioon 1.3. Kui $F(x)$ on funktsiooni $f(x)$ algfunktsioon, siis avaldist $F(x)+C$, kus C on suvaline konstant, nimetatakse funktsiooni $f(x)$ *määramata integraaliks* ja tähistatakse

$$\int f(x)dx.$$

Siin funktsiooni $f(x)$ nimetatakse *integreeritavaks funktsiooniks*, dx *argumendi diferentsiaaliks* ja korrutist $f(x)dx$ *integreeritavaks avaldiseks.* Seega definitsiooni kohaselt

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

kus suvaline konstant C kannab ka nimetust *integreerimiskonstant*. Eeltoodud näidete põhjal

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C.$$

Teeme määramata integraali definitsioonist mõningad järeldused.

Järeldus 1.4. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, st määramata integraali tuletis on võrdne integreeritava funktsiooniga.
Tõepoolest, definitsiooni kohaselt $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x)$.

Järeldus 1.5. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$, st määramata integraali diferentsiaal on võrdne integreeritava avaldisega.
Väide järeldub sellest, et funktsiooni diferentsiaaliks on funktsiooni tuletise ja argumendi diferentsiaali korrutis:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx$$

Järeldus 1.6. $\int dF(x) = F(x) + C$, st määramata integraal funktsiooni diferentsiaalist on võrdne selle funktsiooni ja suvalise konstandi summaga.
Tõepoolest, kui $F'(x) = f(x)$, siis

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C.$$

2 Põhiintegraalide tabel

Selles punktis esitame põhiliste elementaarfunktsioonide määramata integraalid.

2.1. Astmefunktsiooni integraal $\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1.$

Selle kolm erijuhtu: $\displaystyle\int dx = x + C,$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$$

Esimene erijuhtudest sisaldub üldises astmefunktsiooni integraalis astendajaga $\alpha = 0$, teine astendajaga $\alpha = -2$ ja kolmas astandajaga $\alpha = -\frac{1}{2}$. Kui astmefunktsiooni integraalis $\alpha = -1$, siis

2.2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

Trigonomeetriliste funktsioonide integraalid:

2.3. $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C.$

2.4. $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C.$

2.5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C.$

2.6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$

2.7. Eksponentfunktsiooni integraal $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1$

ja selle erijuht $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C.$

Integraalid, mille algfunktsioonideks on arkusfunktsioonid (mitte arkusfunktsiooonide integraalid - neid vaatleme allpool).

2.8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

2.9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$

2.10. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.$

2.11. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan \frac{x}{a} + C.$

Kaks naturaallogaritmiga seotud intetgraali.

2.12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$

2.13. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$

Hüperboolste funktsioonide integraalid

2.14. $\displaystyle\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$

2.15. $\displaystyle\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$

2.17. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$

2.17. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$

Kõik tabelis olevad valemid on vahetult kontrollitavad, sest paremal pool võrdusmärki olev funktsioon peab olema integreeritava funktsiooni algfunktsiooniks, st selle tuletis peab olema võrdne integreeritava funktsiooniga (valemite 2.12 ja 2.13 puhul on lugejal soovitatav selles veenduda).

3 Määramata integraali omadused

Selles punktis tõestame kolm määramata integraali omadust ja kasutame neid omadusi integreerimisel.

Omadus 3.1. $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$, st kahe funktsiooni summa määramata integraal on võrdne nende funktsioonide määramata integraalide summaga.

Tõestus. Kaks määramata integraali on võrdsed, kui nad erinevad teineteisest ülimalt konstandi võrra ehk nende tuletised on võrdsed. Näitame seda. Võttes vasakult poolt tuletise, saame järelduse 1.4 abil, et

$$\left(\int [f(x)+g(x)]dx\right)' = f(x) + g(x).$$

Paremalt poolt tuletist võttes kasutame sama järeldust ja summa tuletise omadust:

$$\left(\int f(x)dx + \int g(x)dx\right)' = \left(\int f(x)dx\right)' + \left(\int g(x)dx\right)' = f(x) + g(x).$$

Omadus 3.2. Kui a on konstant, siis $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$, st konstantse teguri saab tuua integraali märgi ette.
Omaduse 3.2 põhjendus on analoogililine omaduse 3.1 põhjendusega.

Omadus 3.3. $\int[f(x)-g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$, st kahe funktsiooni vahe määramata integraal on võrdne nende funktsioonide määramata integraalide vahega.
Põhjenduseks kasutame kahte eelmist omadust:

$$\begin{aligned}\int[f(x)-g(x)]dx = \int[f(x)+(-1)g(x)]dx &= \int f(x)dx + \int(-1)g(x)dx \\ &= \int f(x)dx - \int g(x)dx.\end{aligned}$$

Toome mõned näited integraalidest, mida on võimalik leida, kasutades põhiintegraalide tabelit ja määramata integraali omadusi 3.1 - 3.3.

Näide 3.4. Leiame $\int (x^2 + 2\sin x)\,dx$.
Kasutades omadusi 3.1 ja 3.2 ning tabeliintegraale 2.1 ja 2.4, leiame

$$\int x^2dx + \int 2\sin x dx = \int x^2dx + 2\int \sin x dx = \frac{x^3}{3} - 2\cos x + C.$$

Näide 3.5. Leiame

$$\int \frac{(x-1)^2}{x(1+x^2)}dx.$$

Siin avame esmalt lugejas sulud, seejärel jagame liikmeti, taandame, kasutame omadusi 3.3 ja 3.2 ning tabeliintegraale 2.2 ja 2.10:

$$\begin{aligned}\int \frac{(x-1)^2}{x(1+x^2)}dx &= \int \frac{x^2+1-2x}{x(1+x^2)}dx = \int\left(\frac{x^2+1}{x(1+x^2)} - \frac{2x}{x(1+x^2)}\right)dx \\ &= \int\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{1+x^2}\right)dx = \int\frac{dx}{x} - 2\int\frac{dx}{1+x^2} \\ &= \ln|x| - 2\arctan x + C.\end{aligned}$$

Näide 3.6. Leiame

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx.$$

Kasutades järgemööda kahekordse argumendi koosinuse valemit, liikmeti jagamist, määramata integraali omadust 3.3 ja tabeliintegraale 2.5 ning 2.6, saame, et

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx &= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int\left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\right)dx \\ &= \int\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = \int\frac{dx}{\sin^2 x} - \int\frac{dx}{\cos^2 x} = -\cot x - \tan x + C.\end{aligned}$$

Märkus. Siiani oleme integreerimismuutujana kasutanud ainult tähte x. Loomulikult ei sõltu määramata integraal sellest, millega on tähistatud integreerimismuutuja, vaid ainult integreeritavast funktsioonist, seega

$$\int f(x)dx = \int f(y)dy = \int f(t)dt = \ldots.$$

Kaugeltki mitte kõiki funktsioone ei ole võimalik integreerida esitatud kolme näite eeskujul elementaarmatemaatika võtteid kasutades. Järgnevas vaatleme meetodeid, mis lubavad tabeli abil integreeritavate funktsioonide hulka oluliselt laiendada.

4 Integreerimine muutuja vahetusega

Vaatleme integraali $\int f(x)dx$ ja ühest funktsiooni $x = \varphi(t)$, millel on ühene pöördfunktsioon $t = \Phi(x)$.

Teoreem 4.1. Kui $x = \varphi(t)$ on rangelt kasvav (rangelt kahanev) diferentseeruv funktsioon, siis

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \tag{4.1}$$

Tõestus. Kasutame jälle asjaolu, määramata integraalid on võrdsed, kui on võrdsed nende tuletised. Diferentseerime võrduse (4.1) mõlemat poolt x järgi ja veendume, et tulemus on sama. Vasaku poole tuletis on järelduse 1.4 põhjal $f(x)$. Parema poole algfunktsioon on muutuja t funktsioon, seega muutuja x järgi tuletist võttes peame paremat poolt diferentseerima kui liitfunktsiooni: integraali tuletis t järgi korrutatud t tuletisega x järgi, st

$$\left(\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt\right)'_x = \left(\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt\right)'_t \cdot \frac{dt}{dx}.$$

Järelduse 1.4 põhjal

$$\left(\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt\right)'_t = f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t).$$

Tehtud eelduse tõttu $\varphi'(t) \neq 0$, seega pöördfunktsiooni $t = \Phi(x)$ tuletiseks on antud funktsiooni tuletise pöördväärtus, st

$$\frac{dt}{dx} = \Phi'(x) = \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Kokku saame, et

$$\left(\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt\right)'_x = f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x)$$

ehk tõepoolest on võrduse (4.1) mõlema poole tuletised võrdsed funktsiooniga $f(x)$, mis tõestabki teoreemi väite.

Märkus. Asendust $x = \varphi(t)$ ehk $t = \Phi(x)$ nimetatakse muutuja vahetuseks. Selle võib teha nii ühe kui teise, aga ka mistahes muu sama sõltuvust väljendava võrdusena.

Näide 4.2. Leiame integraali

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Selles integraalis saab kasutada muutuja vahetust $t = x^2 + 1$, aga samuti ka $x^2 = t - 1$ või $x = \sqrt{t-1}$. Kasutame esitatud võimalustest viimast, leiame $dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t-1}}$ ja

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t-1+1}}\frac{dt}{2\sqrt{t-1}} = \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C = \sqrt{x^2+1} + C.$$

Kasutades aga pakutud võimalustest esimest, saame $dt = 2xdx$ ehk $xdx = \dfrac{dt}{2}$ tõttu, et

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{dt}{2} = \sqrt{t} + C = \sqrt{x^2+1} + C.$$

Teeme teoreemist 4.1 kaks järeldust.

Järeldus 4.3.
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C,$$
st muuru, mille lugejas on nimetaja tuletis, määramata integraaliks on naturaallogaritm nimetaja absoluutväärtusest, millele lisandub integreerimiskonstant.

Tõepoolest, tehes integraalis $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ muutuja vahetuse $t = f(x)$, saame $dt = f'(x)dx$ tõttu, et
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C.$$

Näide 4.4. Leiame
$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \ln|\sin x| + C.$$

Näide 4.5. Leiame
$$\int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

Näide 4.6. Leiame
$$\int \operatorname{cth} x dx = \int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}dx = \ln|\operatorname{sh} x| + C.$$

Siin ei pea naturaallogaritmi argument olema absoluutväärtuse märkide vahel, sest avaldis x^2+1 on nagunii iga x väärtuse korral positiivne.

Järeldus 4.7. Kui $\int f(x)dx = F(x) + C$, siis $a \neq 0$ korral
$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,$$
st kui integreeritava funktsiooni argument x on asendatud lineaarse avaldisega $ax+b$, siis on ka algfunktsiooni argumendiks $ax+b$ ja niisugaue argumendiga algfunktsiooni tuleb korrutada x kordaja pöördväärtusega $1/a$.
Järelduse 4.7 väite kontrollimiseks piisab lineaarsest muutuja vahetusest $t = ax+b$, mille korral $dt = adx$ ehk $dx = \frac{1}{a}dt$ ning
$$\int f(ax+b)dx = \int f(t)\frac{1}{a}dt = \frac{1}{a}\int f(t)dt = \frac{1}{a}F(t) + C = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Näide 4.8. Teades, et $\int \cos x dx = \sin x + C$, saame järeldusest 4.7, et
$$\int \cos(3x+4)dx = \frac{1}{3}\sin(3x+4) + C.$$

Näide 4.9. Teades, et $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$, leiame
$$\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}}\tan\frac{x}{3} + C = 3\tan\frac{x}{3} + C.$$

Näide 4.10. Teades, et (tabeliintegraal 2.11) $\int \frac{dx}{2+x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C$, leiame

$$\int \frac{dx}{4x^2+4x+3} = \int \frac{dx}{(2x+1)^2+2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

Lihtsamatel juhtudel ei pea alati uut muutujat kasutusele võtma. Oletame, et $\int f(x)dx$ on tabeliintegraal. Kui on vaja leida integraal

$$\int \varphi'(x) f[\varphi(x)]dx,$$

siis kasutades funktsiooni diferentsiaali avaldist $d[\varphi(x)] = \varphi'(x)dx$, kirjutame

$$\int \varphi'(x) f[\varphi(x)]dx = \int f[\varphi(x)]d[\varphi(x)]$$

ja tulemuse vaatame tabelist, kasutades integreerimismuutuja x asemel muutujat $\varphi(x)$. Niisugust integreerimist nimetatakse integreerimiseks *diferentsiaali märgi alla viimisega.*

Näide 4.11. Kasutades diferentsiaali $d(x^2+2) = 2xdx$ ehk $xdx = \frac{1}{2}d(x^2+2)$ ja tabeliintegraali 2.1, leiame

$$\int x\sqrt{x^2+2}dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{x^2+2}d(x^2+2) = \frac{1}{2}\frac{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}{3} + C.$$

Näide 4.12. Kasutades diferentsiaali $d(x^3) = 3x^2dx$ ja tabeliintegraali 2.4, leiame

$$\int x^2 \sin x^3 dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 \sin x^3 dx = \frac{1}{3}\int \sin x^3 d(x^3) = -\frac{1}{3}\cos x^3 + C.$$

5 Ositi integreerimine

Olgu meil antud kaks diferentseeruvat funktsiooni $u = u(x)$ ja $v = v(x)$. Nende funktsioonide korrutise diferentsiaal

$$d(uv) = udv + vdu.$$

Määratud integraali omaduse 3.1 põhjal

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu$$

ja järelduse 1.6 tõttu

$$uv = \int udv + \int vdu.$$

Viimasest võrdusest saame *ositi integreerimise* valemi

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{5.1}$$

Ositi integreerimise valemi rakendamisel kerkib üles kaks põhiprobleemi. Esiteks - milliste funktsioonide korral seda rakendada ja teiseks - kuidas valida funktsioon u ning funktsiooni v diferentsiaal dv. Siin on ühest retsepti võimatu anda. Ositi integreerimise valem on rakendatav

väga mitmesuguste funktsioonide integreerimisel, kaasa arvatud ka niisuguste integraalide korral, mille leidmine muude meetoditega on lühem ja lihtsam. Enam huvi pakuvad funktsioonid, mille integreerimine muude meetoditega osutub võimatuks. Näiteks on ainult ositi integreeritavad:
1) hulkliikmete ja siinuste korrutised,
2) hulkliikmete ja koosinuste korrutised,
3) hulkliikmete ja eksponentfunktsioonide korrutised,
kusjuures kõigil kolmel juhul valitakse ositi integreerimise valemis funktsiooniks u hulkliige ja diferentsiaaliks dv vastavalt siinuse ja argumendi diferentsiaali dx korrutis, koosinuse ja argumendi diferentsiaali dx korrutis või eksponentfunktsiooni ja argumendi diferentsiaali dx korrutis.

Näide 5.1. Leiame $\int (x^2+3x)\sin 2x dx$.

Siin on integreeritavaks funktsiooniks hulkliikme ja siinuse korrutis. Seega valime ositi integreerimise valemis (5.1) $u = x^2+3x$ ja $dv = \sin 2x dx$. Edasi leiame funktsiooni u diferentsiaali $du = (2x+3)dx$ ja, kasutades järeldust 4.6, funktsiooni $v = \int \sin 2x dx = -\dfrac{1}{2}\cos 2x$. Funktsiooni v leidmisel on otstarbekas integreerimiskonstant võtta võrdseks nulliga, sest hiljem koonduksid seda integreerimiskonstanti sisaldavad liikmed ikkagi välja. Selles võib iga lugeja ise veenduda.

Ositi integreerimise valemi rakendamisel saame nüüd, et

$$\begin{aligned}\int (x^2+3x)\sin 2x dx &= -\frac{1}{2}(x^2+3x)\cos 2x - \int (2x+3)\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2x dx\\ &= -\frac{1}{2}(x^2+3x)\cos 2x + \frac{1}{2}\int (2x+3)\cos 2x dx.\end{aligned}$$

Viimane integraal kujutab endast hulkliikme ja koosinuse korrutist. Ka seda peab integreerima ositi, valides $u = 2x+3$ ja $dv = \cos 2x dx$. Siis $du = 2dx$ ja $v = \int \cos 2x dx = \dfrac{1}{2}\sin 2x$ ning ositi integreerimise valemi abil

$$\begin{aligned}\int (2x+3)\cos 2x dx &= \frac{1}{2}(2x+3)\sin 2x - \int \frac{1}{2}\sin 2x \cdot 2dx =\\ &= \frac{2x+3}{2}\sin 2x - \int \sin 2x dx = \frac{2x+3}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + C.\end{aligned}$$

Seega kokkuvõttes

$$\begin{aligned}\int (x^2+3x)\sin 2x dx &= -\frac{1}{2}(x^2+3x)\cos 2x + \frac{2x+3}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C\\ &= \frac{1-6x-2x^2}{4}\cos 2x + \frac{2x+3}{4}\sin 2x + C.\end{aligned}$$

Näide 5.2. Leiame $\displaystyle\int x5^x dx$.

Siin on integreertavaks funktsiooniks hulkliikme (erijuhuna üksliikme x) ja eksponentfunktsiooni korrutis. Seega valime ositi integreerimise valemis $u = x$ ja $dv = 5^x dx$. Siis $du = dx$, $v = \displaystyle\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5}$ ja

$$\begin{aligned}\int x5^x dx &= x\frac{5^x}{\ln 5} - \int \frac{5^x}{\ln 5}dx = \frac{x5^x}{\ln 5} - \frac{1}{\ln 5}\int 5^x dx\\ &= \frac{x5^x}{\ln 5} - \frac{1}{\ln 5}\cdot\frac{5^x}{\ln 5} + C = \frac{5^x}{\ln 5}\left(x - \frac{1}{\ln 5}\right) + C.\end{aligned}$$

Peale eespool toodud korrutiste on veel mitmeid funktsioonide tüüpe, mida on võimalik integreerida ainult ositi.

Näide 5.3. Leiame $\int x \log x dx$.

Siin valime ositi integreerimise valemis $u = \log x$ ja $dv = xdx$. Sellisel juhul $du = \frac{dx}{x \ln 10}$, $v = \int xdx = \frac{x^2}{2}$ ja

$$\int x \log x dx = \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x \ln 10} = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{2 \ln 10} \int xdx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4 \ln 10} + C.$$

Näide 5.4. Leiame $\int \arcsin x dx$.

Ositi integreerimise valemis valime $u = \arcsin x$ ja $dv = dx$ (rohkem valikuvõimalusi siin polegi!). Leiame $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = \int dx = x$ ja ositi integreerimise valemi abil

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Viimases integraalis teeme muutuja vahetuse $t = 1 - x^2$. Siis $dt = -2xdx$ ehk $xdx = -\frac{dt}{2}$ ja

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

Seega

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

6 Ratsionaalavaldiste integreerimine

6.1 Ratsionaalavaldise täisosa eraldamine

Ratsionaalavaldiseks nimetatakse kahe hulkliikme jagatist. Näiteks on ratsionaalavaldisteks

$$\frac{1}{x^2-1}, \quad \frac{2x^2-x+1}{x^3-x^2+x-1}, \quad \frac{x^3+1}{x^3-1}, \quad \frac{x^4}{x^2+1} \tag{6.1}$$

ehk üldkujul

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n},$$

kus a_0 ja b_0 on vastavalt lugeja ja nimetaja vabaliikmed, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ vastavate x atsmete arvulised kordajad lugejas ning $b_1, b_2, \ldots, b_n$ vastavate x astmete kordajad nimetajas.

Juhul kui $m < n$, nimetatakse ratsionaalavaldist *ratsionaalseks lihtmurruks* ja kui $m \geq n$, nimetatakse ratsionaalavaldist *ratsionaalseks liigmurruks*. Toodud näidetest (6.1) kaks esimest on ratsionaalsed lihtmurrud, kaks viimast aga ratsionaalsed liigmurrud. Ratsionaalse liigmurru korral eraldatakse sellest kõigepealt täisosa, st liigmurd esitatakse hulkliikme ehk täisosa ja ratsionaalse lihtmurru summana. Lihtsamatel juhtudel saab täisosa eraldada ratsionaalset murdu sobiva arvuga samaaegselt korrutades ja jagades ja lugejale sobivaid suurusi liites ja lahutades, st tehes elementaartehteid, mis murru väärtust ei muuda.

Näide 6.1. Eraldame ratsionaalse liigmurru $\frac{x^2}{2x-1}$ täisosa ja integreerime. Kõigepealt jagame ja korrutame murdu 4-ga,

$$\frac{x^2}{2x-1} = \frac{1}{4}\frac{4x^2}{2x-1},$$

seejärel liidame lugejale $-1+1$,

$$\frac{x^2}{2x-1} = \frac{1}{4}\frac{4x^2-1+1}{2x-1} = \frac{1}{4}\frac{4x^2-1}{2x-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{2x-1},$$

millest pärast taandamist saame, et

$$\frac{x^2}{2x-1} = \frac{1}{4}(2x+1) + \frac{1}{4(2x-1)}.$$

Tulemusena saime täisosaks hulkliikme $\frac{1}{4}(2x+1)$ ja murdosaks ratsionaalse lihtmurru $\frac{1}{4(2x-1)}$. Nüüd on antud ratsionaalavaldis hõlpsasti integreeritav:

$$\int \frac{x^2dx}{2x-1} = \frac{1}{4}\int(2x+1)dx + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{4}(x^2+x) + \frac{1}{8}\ln|2x-1| + C.$$

Viimase integraali leidmiseks saab kasutada näiteks järeldust 4.6.

Keerulisematel juhtudel kasutatakse hulkliikmete jagamisel põhimõtet: mitu korda mahub jagaja kõrgeim aste jagatava kõrgeimasse astmesse.

Näide 6.2. Eraldame täisosa ratsionaalses liigmurrus

$$\frac{2x^4-3x^3+x^2-2}{x^2-3x+2}.$$

Siin on jagajas x^2-3x+2 muutuja x kõrgeimaks astmeks x^2 ja jagatavas $2x^4-3x^3+x^2-2$ on kõrgeima astmega liige $2x^4$. Jagaja kõrgeimat astet peab korrutama suurusega $2x^2$, selleks et saada jagatava kõrgeimat astet. Seega esimeseks liikmeks jagatises on $2x^2$. Sellega korrutame kogu jagaja, tulemuse $2x^4-6x^3+4x^4$ kirjutame jagatava alla ja lahutame:

$$\begin{array}{lcl}
2x^4-3x^3+x^2-2 & : & x^2-3x+2 \\
\underline{2x^4-6x^3+4x^2} & & 2x^2+3x+6. \\
\quad 3x^3-3x^2-2 & & \\
\quad \underline{3x^3-9x^2+6x} & & \\
\qquad 6x^2-6x-2 & & \\
\qquad \underline{6x^2-18x+12} & & \\
\qquad\quad 12x-14 & &
\end{array}$$

Lahutamise tulemuseks on $3x^3-3x^2-2$. Järgmise liikme jagatisse leiame saadud tulemuse ja jagaja kõrgemate astmete võrdlemise teel - jagaja kõrgeimat astet x^2 tuleb korrutada suurusega $3x$, selleks et saada kõrgeimat astet $3x^3$. Korrutame $3x$-ga kogu jagajat, kirjutame tulemuse $3x^3-9x^2+6x$ eelmise lahutamise tulemuse alla ning lahutame uuesti ülemisest alumise. Tulemuseks on $6x^2-6x-2$. Selle hulkliikme kõrgeima astme saamiseks peame jagaja kõrgeimat astet x^2 korrutama 6-ga. Korrutame 6-ga kogu jagajat, kirjutame tulemuse $6x^2-18x+12$ eelmise lahutamise tulemuse alla ning lahutame taas ülemisest alumise. Saame $12x-14$, milles muutuja x kõrgeim aste on madalam kui jagajas. Järelikult on jagatise täisosaks $2x^2+3x+6$, jäägiks $12x-14$ ja antud ratsionaalne liigmurd on esitatav kujul

$$\frac{2x^4-3x^3+x^2-2}{x^2-3x+2} = 2x^2+3x+6+\frac{12x-14}{x^2-3x+2}.$$

Tulemust on lihtne kontrollida: võttes parempoolse avaldise ühisele nimetajale, peame tagasi saama esialgse liigmurru.

Saadud summas tekkinud hulkliikme integreerimine on lihtne, seega ratsionaalavaldise integreerimisel on põhiliseks probleemiks ratsionaalse lihtmurru integreerimine. Selleks tuleb ratsionaalne lihtmurd lahutada *osamurdudeks.*

6.2 Osamurrud

Osamurdusid on nelja liiki (A, B, a,b ja c tähistavad konstante).

- Esimest liiki osamurd $\dfrac{A}{x-a}$;
- teist liiki osamurd $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, kus $k \in \mathbb{N}$ ja $k > 1$;
- kolmandat liiki osamurd $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, kus nimetajas oleval ruutkolmliikmel reaalsed nullkohad puuduvad;
- neljandat liiki osamurd $\dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$, kus $k \in \mathbb{N}$ ja $k > 1$ ja nimetajas oleval ruutkolmliikmel reaalsed nullkohad puuduvad.

Vaatleme esimest, teist ja kolmandat liiki osamurru integreerimist. Tabeliintegraali põhjal 2.2 saame võrdust $dx = d(x-a)$ kasutades esimest liiki osamurru integraali

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C. \tag{6.2}$$

Teist liiki osamurru integreerimise kohta esitame näite.

Näide 6.3. Leiame $\displaystyle\int \frac{5dx}{(x+2)^3}$.

Kasutades diferentsiaali märgi alla viimisel võrdust $dx = d(x+2)$, saame

$$\int \frac{5dx}{(x+2)^3} = 5\int (x+2)^{-3}d(x+2) = 5\cdot\frac{(x+2)^{-2}}{-2} + C = -\frac{5}{2(x+2)^2} + C.$$

Kolmandat liiki osamurru integreerimise tulemuseks on üldjuhul naturaallogaritmi ja arkustangensi summa. Kui lugejas on ainult konstant, st $A = 0$, siis on integreerimise tulemuseks ainult arkustangens.

Näide 6.4. Leiame $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^2+6x+5}$.

Ruutkolmliikmel $9x^2+6x+5 = 4+9x^2+6x+1 = 4+(3x+1)^2$ reaalsed nullkohad ilmselt puuduvad. Kasutades diferentsiaali märgi alla viimisel võrdust $dx = \dfrac{1}{3}\cdot 3dx = \dfrac{1}{3}d(3x+1)$ ja tabeliintegraali 2.11 saame, et

$$\int \frac{dx}{9x^2+6x+5} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x+1)}{4+(3x+1)^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\arctan\frac{3x+1}{2} + C = \frac{1}{6}\arctan\frac{3x+1}{2} + C.$$

Kui lugejas on nimetaja tuletis või selle mingi arv kordne, siis on kolmandat liiki osamurru integreerimise tulemuseks ainult naturaallogaritm.

Näide 6.5. Leiame $\displaystyle\int \frac{(3x+1)dx}{9x^2+6x+5}$.

Võrduse $(3x+1)dx = \dfrac{1}{6}d(9x^2+6x+5)$ tõttu

$$\int \frac{(3x+1)dx}{9x^2+6x+5} = \frac{1}{6}\int \frac{d(9x^2+6x+5)}{9x^2+6x+5} = \frac{1}{6}\ln(9x^2+6x+5)+C.$$

Üldjuhul eraldame kolmandat liiki osamurru integreerimiseks lugejast kõigepealt naturaallogaritmi saamiseks vajaliku osa, kasutades murru korrutamist ja jagamist sobivalt valitud konstandiga ja seejärel mingi konstandi lugejale liitmist ja lugejast lahutamist. Pärast seda jääb teise murru lugejasse ainult konstant ja selle integreerimise tulemusena saame arkustangensi.

Näide 6.6. Leiame $\displaystyle\int \frac{(2x-1)dx}{9x^2+6x+5}$.

Kasutades näidete 6.4 ja 6.5 tulemusi, leiame

$$\begin{aligned}
&\int \frac{(2x-1)dx}{9x^2+6x+5} = \frac{1}{9}\int \frac{(18x-9)dx}{9x^2+6x+5} = \frac{1}{9}\int \frac{18x+6-6-9}{9x^2+6x+5}dx \\
= \ &\frac{1}{9}\int \frac{(18x+6)dx}{9x^2+6x+5} - \frac{15}{9}\int \frac{dx}{9x^2+6x+5} = \frac{1}{9}\ln(9x^2+6x+5) \\
- \ &\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{6}\arctan\frac{3x+1}{2} + C = \frac{1}{9}\ln(9x^2+6x+5) - \frac{5}{18}\arctan\frac{3x+1}{2} + C.
\end{aligned}$$

6.3 Ratsionaalse lihtmurru lahutamine osamurdudeks

Selleks, et osamurde ratsionaalse lihtmurru integreerimisel kasutada, tuleb lihtmurd eelnevalt osamurdudeks lahutada. Lahutamine sõltub sellest, kas nimetajas oleval hulkliikmel on ainult ühekordsed reaalsed nullkohad, kas sellel esineb kordseid reaalseid nullkohti või kas sellel on teguriteks ruutkolmliikmeid, millel reaalsed nullkohad puuduvad. Vaatleme järgnevalt neid kolme juhtu näidete varal.

Näide 6.7. Leiame integraali $\displaystyle\int \frac{(4x^2-3x-4)dx}{x^3+x^2-2x}$.
Nimetajas oleva ruutkolmliikme teguriteks lahutus on

$$x^3+x^2-2x = x(x^2+x-2) = x(x-1)(x+2).$$

Avaldisel on kolm erinevet reaalset nullkohta $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ ja $x_3 = -2$. Iga nimetajas oleva teguri jaoks kirjutame ühe esimest liiki osamurru,

$$\frac{4x^2-3x-4}{x^3+x^2-2x} \equiv \frac{4x^2-3x-4}{x(x-1)(x+2)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}. \tag{6.3}$$

Tundmatud konstandid A, B ja C määrame nii, et kolme osamurru summa oleks antud ratsionaalavaldisega samaselt võrdne ($\equiv$). Viies kolm osamurdu ühisele nimetajals, saame samasuse

$$\frac{4x^2-3x-4}{x(x-1)(x+2)} \equiv \frac{A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)}.$$

Kahe samaselt võrdse murru nimetajad on samaselt võrdsed, seega saame ka lugejate kohta samasuse

$$A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)\equiv 4x^2-3x-4. \tag{6.4}$$

Samasus tähendab seda, et võrdus kehtib iga x väärtuse korral. Kordajad A, B ja C saame hõlpsasti määrata, andes muutujale x järgemööda väärtusteks nimetaja nullkohad. Kui $x=0$, siis saame samasusest (6.4), et $-2A=-4$, millest $A=2$. Kui $x=1$, saame samasusest (6.4) $3B=-3$, millest $B=-1$ ja kui $x=-2$, saame samasusest (6.4) $6C=18$, millest $C=3$. Sellega on meil konstandid määratud ja osamurdudeks lahutuse (6.3) abil leiame

$$\begin{aligned}\int\frac{(4x^2-3x-4)dx}{x^3+x^2-2x} &= \int\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+2}\right)dx\\ = \ 2\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x-1}+3\int\frac{dx}{x+2} &= 2\ln|x|-\ln|x-1|+3\ln|x+2|+C.\end{aligned}$$

Näide 6.8. Leiame integraali $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3+x^2-x-1}$.
Lahutades nimetajas oleva hulkliikme teguriteks

$$x^3+x^2-x-1=x^2(x+1)-(x+1)=(x+1)(x^2-1)=(x-1)(x+1)^2,$$

näeme, et nimetajal on kaks reaalset nullkohta $x_1=1$ ja $x_2=-1$, millest teine on kahekordne, st nimetaja sisaldab kaks korda tegurit $x+1$. Ühekordse nullkoha jaoks kirjutame ühe esimest liiki osamurru nagu eelmises näiteski, kahekordse nullkoha jaoks kirjutame aga ühe esimest ja ühe teist liiki osamurru ehk osamurdudeks lahutuse kirjutame kujul

$$\frac{1}{x^3+x^2-x-1}\equiv\frac{1}{(x-1)(x+1)^2}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}. \tag{6.5}$$

Üldjuhul tuleb kordse nullkoha jaoks välja kirjutada nii mitu osamurdu, kui suur on tema kordsus, kusjuures iga järgneva osamurru nimetaja astendaja on ühe võrra suurem. Võttes lahutuses (6.5) parema poole ühisele nimetajale, saame samasuse

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)^2}\equiv\frac{A(x+1)^2+B(x-1)(x+1)+C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2},$$

millest omakorda järeldub lugejate samasus

$$A(x+1)^2+B(x-1)(x+1)+C(x-1)\equiv 1. \tag{6.6}$$

Võttes samasuses (6.6) $x=1$, saame $4A=1$, millest $A=1/4$. Võttes samasuses (6.6) $x=-1$, saame $-2C=1$ ehk $C=-1/2$. Kolmanda kordaja määramiseks enam nullkohta ei ole, seepärast anname muutujale x ühe suvalise (võimalikult lihtsa) väärtuse, näiteks $x=0$. Samasusest (6.6) saame, et $A-B-C=1$. Kasutades juba leitud A ja C väärtusi, leiame $B=A-C-1=-1/4$. Nüüd leiame osamurdudeke lahutuse (6.5) abil integraali

$$\begin{aligned}&\int\frac{dx}{x^3+x^2-x-1}=\int\left(\frac{1}{4}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{4}\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx\\ =\ &\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2}=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}+C\\ =\ &\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{1}{2(x+1)}+C.\end{aligned}$$

Näide 6.9. Leiame integraali $\int \frac{x+1}{x^3+2x^2+3x}dx$.
Lahutades nimetajas oleva hulkliikme teguriteks,

$$x^3+2x^2+3x = x(x^2+2x+3)$$

näeme, et nimetajal on üks reaalne nullkoht $x_1 = 0$. Peale selle sisaldab nimetaja tegurina ruutkolmliiget, millel reaalsed nullkohad puuduvad. Osamurdudeks lahutuses kirjutame ühekordse reaalse nullkoha jaoks esimest liiki osamurru ja teguriteks lahutamatu ruutkolmliikme jaoks kirjutame kolmandat liiki osamurru. Osamurdudeks lahutuse esitame samasusena

$$\frac{x+1}{x^3+2x^2+3x} \equiv \frac{x+1}{x(x^2+2x+3)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+3}. \tag{6.7}$$

Viies osamurrud ühisele nimetajale, saame samasuse

$$\frac{x+1}{x(x^2+2x+3)} \equiv \frac{A(x^2+2x+3)+(Bx+C)x}{x(x^2+2x+3)},$$

millest järeldub lugejate samasus

$$Ax^2+2Ax+3A+Bx^2+Cx \equiv x+1$$

Antud juhul on reaalseid nullkohti ainult üks, kordajaid tuleb aga määrata kolm. Seepärast kasutame siin asjaolu, et kaks hulkliiget on samaselt võrdsed parajasti siis, kui muutuja vastavate astmete kordajad on võrdsed. Võttes samasuse vasakul pool vastavad x astmed kokku, saame

$$(A+B)x^2+(2A+C)x+3A \equiv x+1$$

Paremal pool ruutliige puudub, st selle kordaja võrdub nulliga. Seega ruutliikmete kordajate võrdsus annab meile võrrandi $A+B=0$. Lineaarliikmete kordajate võrdsus annab teise võrrandi $2A+C=1$ ja vabaliikmete võrdsus kolmanda võrrandi $3A=1$. Meil on kolmest võrrandist ja kolmest tundmatust koosnev võrrandisüsteem

$$\begin{cases} A+B &= 0 \\ 2A+C &= 1 \\ 3A &= 1, \end{cases}$$

mille lahendamisel saame, et $A=1/3$, $B=-1/3$ ja $C=1/3$. Kasutades osamurdudeks lahutust (6.7), leiame

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{x^3+2x^2+3x}dx &= \int \left(\frac{\frac{1}{3}}{x} + \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2+2x+3}\right)dx = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x} - \frac{1}{3}\int\frac{(x-1)dx}{x^2+2x+3} \\
&= \frac{1}{3}\ln|x| - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{(2x-2)dx}{x^2+2x+3} = \frac{1}{3}\ln|x| - \frac{1}{6}\int\frac{(2x+2-4)dx}{x^2+2x+3} \\
&= \frac{1}{6}\cdot 2\ln|x| - \frac{1}{6}\int\frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+3} + \frac{4}{6}\int\frac{dx}{2+x^2+2x+1} \\
&= \frac{1}{6}\ln x^2 - \frac{1}{6}\ln(x^2+2x+3) + \frac{2}{3}\int\frac{dx}{2+(x+1)^2} \\
&= \frac{1}{6}\ln\frac{x^2}{x^2+2x+3} + \frac{2}{3\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.
\end{aligned}$$

7 Mõnede trigonomeetriliste funktsioonide klasside integreerimine

Selles punktis vaatleme trigonomeetrilistest funktsioonidest koosnevate ratsionaalavaldiste integreerimist, st integraale kujul

$$\int R(\sin x, \cos x)dx, \tag{7.1}$$

kus $R(\sin x, \cos x)dx$ kujutab endast ratsionaalavaldist $\sin x$ ja $\cos x$ suhtes. Sellised ratsionaalavaldised on näiteks

$$\frac{1}{\sin x}, \quad \frac{1}{2+\cos x}, \quad \frac{\cos^3 x + \sin x}{\sin^2 x + \cos x}$$

või erandjuhul trigonomeetriliste funktsioonide korrutised, näiteks $\sin 2x \cos^2 x$.

7.1 Üldine muutuja vahetus

Muutuja vahetusega $t = \tan \frac{x}{2}$ saab integraali (7.1) alati teisendada ratsionaalavaldise integraaliks, sest esiteks $\frac{x}{2} = \arctan t$ millest $x = 2\arctan t$ ja

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Teiseks,

$$\sin x = \frac{\sin\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right)}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}.$$

Jagades viimases avaldises lugejat ja nimetajat suurusega $\cos^2\frac{x}{2}$, saame

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Kolmandaks,

$$\cos x = \frac{\cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right)}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}}$$

ehk pärast lugeja ja nimetaja jagamist suurusega $\cos^2\frac{x}{2}$

$$\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Seega on integraal (7.1) muutuja vahetusega $t = \tan\frac{x}{2}$ teisendatav ratsionaalavaldise integraaliks

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Näide 7.1. Leiame integraali $\int \frac{dx}{2+\cos x}$.

Teeme siin muutuja vahetuse $t = \tan\frac{x}{2}$. Asendades $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ ja $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ saame, et

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{3+t^2}$$

$$= 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C.$$

7.2 Muutuja vahetus $t = \tan x$

Muutuja vahetus $t = \tan\frac{x}{2}$ on universaalne trigonomeetrilistest funktsioonidest koosnevate avaldiste integreerimiseks ja seepärast alati rakendatav, aga oma universaalsuse tõttu viib sellise muutuja vahetuse kasutamine sageli liiga keeruliste ratsionaalavaldiste integreerimiseni, mida on võimalik vältida, kui kasutada vähem üldisi muutuja vahetusi.

Koos vaatleme kaht järgmist tüüpi integraali:

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)dx$$

ja

$$\int R(\tan x)dx,$$

millest esimeses integreeritav funktsioon kujutab endast ratsionaalavaldist $\sin^2 x$ ja $\cos^2 x$ suhtes (st ei sisalda siinuse ja koosinuse paarituid astmeid) ja teine ratsionaalavaldist $\tan x$ suhtes.

Muutuja vahetusega $t = \tan x$ taanduvad mõlemad integraalid ratsionaalavaldiste integraalideks. Antud juhul $x = \arctan t$,

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}, \tag{7.2}$$

$$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2} \tag{7.3}$$

ja

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+t^2}. \tag{7.4}$$

Näide 7.2. Leiame integraali $\int \frac{dx}{\cos 2x}$.

Kasutades kahekordse nurga koosinuse valemit ja valemeid (7.2) - (7.4), saame

$$\int \frac{dx}{\cos 2x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2}}$$

$$= \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}\right| + C.$$

Näide 7.3. Leiame integraali $\int \frac{\cos x dx}{\sin x + \cos x}$.

Jagades lugeja ja nimetaja suurusega $\cos x$, saame ratsionaalavaldise $\tan x$ suhtes, milles teeme muutuja vahetuse $t = \tan x$ ning dx asendame valemi (7.2) abil

$$\int \frac{\cos x dx}{\sin x + \cos x} = \int \frac{dx}{\tan x + 1} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{t+1} = \int \frac{dt}{(1+t)(1+t^2)}.$$

Viimase integraali leidmiseks lahutame saadud ratsionaalavaldise osamurdudeks

$$\frac{1}{(1+t)(1+t^2)} \equiv \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{1+t^2} \equiv \frac{A(1+t^2)+(Bt+C)(1+t)}{(1+t)(1+t^2)}.$$

Tegemist on kahe murru samasusega, kus nimetajad on samaselt võrdsed. Järelikult kehtib ka lugejate kohta samasus

$$A + At^2 + Bt + Bt^2 + C + Ct \equiv 1$$

ehk

$$(A+B)t^2 + (B+C)t + A + C \equiv 1.$$

Vastavate muutuja t astmete kordajate võrdsusest saame kordajate A, B ja C määramiseks kirjutada (arvestades sellega, et paremal pool on ruut- ja lineaarliikme kordajad nullid) võrrandisüstee

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ B + C = 0 \\ A + C = 1, \end{cases}$$

millest $A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}$ ja $C = \frac{1}{2}$. Seega

$$\int \frac{\cos x dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1} - \frac{1}{2}\int \frac{t-1}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\ln|t+1| - \frac{1}{4}\int \frac{2tdt}{t^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1}$$
$$= \frac{1}{2}\ln|t+1| - \frac{1}{4}\ln\left(t^2+1\right) + \frac{1}{2}\arctan t + C.$$

Tehes saadud avaldises tagasiasenduse $t = \tan x$ saame, et

$$\int \frac{\cos x dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{2}\ln|\tan x + 1| - \frac{1}{4}\ln\left(\tan^2 x + 1\right) + \frac{1}{2}\arctan(\tan x) + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x + \cos x}{\cos x}\right| - \frac{1}{4}\ln\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}x + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x + \cos x}{\cos x}\right| + \frac{1}{2}\ln|\cos x| + \frac{1}{2}x + C = \frac{1}{2}\ln|\sin x + \cos x| + \frac{1}{2}x + C.$$

7.3 Muutuja vahetused $t = \sin x$ ja $t = \cos x$

Kui ratsionaalavaldis on kujul (või hõlpsasti teisendatav kujule) $R(\sin x)\cos x$, siis integraali

$$\int R(\sin x)\cos x dx \tag{7.5}$$

leidmiseks tehakse muutuja vahetus $t = \sin x$, st $dt = \cos x dx$, mille tagajärjel integraal (7.5) teiseneb ratsionaalavaldise integraaliks $\int R(t)dt$.

Näide 7.4. Leiame integraali $\displaystyle\int \frac{\sin 2x dx}{1+\sin x}$.

Kahekordse argumendi siinuse valemit kasutades saame

$$\int \frac{\sin 2x dx}{1+\sin x} = \int \frac{2\sin x}{1+\sin x} \cos x dx,$$

st integraali kujul (7.5), milles teeme muutuja vahetuse $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$. Seega

$$\int \frac{\sin 2x dx}{1+\sin x} = 2\int \frac{tdt}{1+t} = 2\int \frac{t+1-1}{1+t} = 2\int \frac{t+1}{1+t}dt - 2\int \frac{dt}{1+t}$$
$$= 2\int dt - 2\int \frac{dt}{1+t} = 2t - 2\ln|1+t| + C = 2\sin x - 2\ln|1+\sin x| + C.$$

Integraali

$$\int R(\cos x)\sin x dx \tag{7.6}$$

leidmiseks tehakse muutuja vahetus $t = \cos x$. Siis $dt = -\sin x dx$ ja integraal (7.6) teiseneb ratsionaalavaldise integraaliks $-\int R(t)dt$.

Näide 7.5. Leiame integraali $\displaystyle\int \frac{\sin x dx}{\cos x - \cos^2 x}$.

Integraal on kujul (7.6). Muutuja vahetusega $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$ saame, et

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos x - \cos^2 x} = -\int \frac{dt}{t-t^2} = \int \frac{dt}{t^2-t}.$$

Saadud integreeritava funktsiooni lahutame osamurdudeks

$$\frac{1}{t^2-t} \equiv \frac{1}{t(t-1)} \equiv \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} \equiv \frac{A(t-1)+Bt}{t(t-1)},$$

millest saame lugejate samasuse

$$A(t-1) + Bt \equiv 1.$$

Võttes viimases $t = 1$ saame, et $B = 1$ ning võttes $t = 0$ saame, et $A = -1$. Seega

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos x - \cos^2 x} = -\int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t-1}$$
$$= \ln|t-1| - \ln|t| + C = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| + C = \ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x}\right| + C.$$

7.4 Teisi võtteid trigonometriliste avaldiste integreerimiseks

Integraali, milles esinevad ainult siinuse ja koosinuse paarisastmed, st integraali kujul

$$\int \sin^{2n} x \cos^{2m} x dx \tag{7.7}$$

on veel võimalik leida poolnurga siinuse ja koosinuse valemite

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \tag{7.8}$$

ja
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \tag{7.9}$$
abil.

Näide 7.6. Leiame integraali $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$.
Valemite (7.8) ja (7.9) abil leiame

$$\int \sin^4 x \cos^2 x dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \frac{1+\cos 2x}{2} dx$$
$$= \frac{1}{8}\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x-\cos^2 2x+\cos^3 2x)dx$$
$$= \frac{1}{8}\int \left[\sin^2 2x - \cos 2x(1-\cos^2 2x)\right] dx = \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx.$$

Saadud integraalidest on teine kujul (7.5). Tehes selles muutuja vahetuse $t = \sin 2x$ saame, et $dt = 2\cos 2x dx$ ehk $\cos 2x dx = \frac{1}{2}dt$ ning

$$\int \sin^4 x \cos^2 x dx = \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)\, dx - \frac{1}{16}\int t^2 dt$$
$$= \frac{x}{16} - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{t^3}{48} + C = \frac{x}{16} - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$$
$$= \frac{x}{16} - \frac{1}{16}\sin x \cos^3 x + \frac{1}{16}\sin^3 x \cos x - \frac{1}{6}\sin^3 x \cos^3 x + C.$$

Viimane teisendus ei ole ilmne, seda peab lugeja ise kontrollima.

Korrutiste $\sin ax \cos bx$, $\cos ax \cos bx$ ja $\sin ax \sin bx$ integreerimiseks kasutatakse trigonomeetria valemeid
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)], \tag{7.10}$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)] \tag{7.11}$$
ja
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]. \tag{7.12}$$

Näide 7.7. Leiame integraali $\displaystyle\int \sin 5x \cos 4x \sin 3x dx$.

Valemi (7.10) abil leiame
$$\int \sin 5x \cos 4x \sin 3x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 9x + \sin x)\sin 3x dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \sin 9x \sin 3x dx + \frac{1}{2}\int \sin x \sin 3x dx$$

ning valemi (7.12) abil
$$\int \sin 5x \cos 4x \sin 3x dx = \frac{1}{4}\int (\cos 6x - \cos 12x)dx + \frac{1}{4}\int (\cos 2x - \cos 4x)dx$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}\sin 6x - \frac{1}{12}\sin 12x\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C$$
$$= \frac{1}{24}\sin 6x - \frac{1}{48}\sin 12x + \frac{1}{8}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 4x + C.$$

8 Ratsionaalavaldiste e^x suhtes integreerimine

Kui $R(e^x)$ tähistab ratsionaalavaldist eksponentfunktsiooni e^x suhtes, siis integraali $\int R(e^x)dx$ leidmiseks tehakse muutuja vahetus $t = e^x$. Siis $dt = e^x dx$, st $dt = tdx$, millest $dx = \frac{dt}{t}$.

Näide 8.1. Leiame integraali $\int \frac{e^{2x} - 2e^x}{e^{2x}+1} dx$.

Integraali leidmiseks teeme muutuja vahetuse $t = e^x$. Siis $dx = \frac{dt}{t}$ ja

$$\int \frac{e^{2x} - 2e^x}{e^{2x}+1} dx = \int \frac{t^2 - 2t}{t^2+1} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{t-2}{t^2+1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2+1} dt - 2 \int \frac{dt}{t^2+1}$$
$$= \frac{1}{2} \ln(t^2+1) - 2 \arctan t + C = \frac{1}{2} \ln(e^{2x}+1) - 2 \arctan e^x + C.$$

9 Irratsionaalavaldiste integraale

Irratsionaalavaldisteks on juuri ehk radikaale sisaldavad avaldised, näiteks

$$\frac{\sqrt[3]{x-1}}{1+\sqrt{x-1}} \quad \text{või} \quad x^2\sqrt{4-x^2}.$$

Üldine põhimõte irratsionaalavldisete integreerimisel on sarnane trigonomeetriliste avaldiste integreerimisega. Teatud kaalutlustest lähtudes tehakse muutuja vahetus, mis teisendab irratsionaalavldise integraali ratsionaalavaldise integraaliks.

9.1

Olgu integraal kujul

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}, ..., \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx. \tag{9.13}$$

st integraal avadisest, mis sisaldab muutujat x ja erinevaid juuri murdlineaarsest avaldisest $\frac{ax+b}{cx+d}$, kus a, b, c ja d on antud konstandid. niisuguse avaldise integreerimiseks saab kasutada muutuja vahetust

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k, \tag{9.14}$$

kus k on juurijate m, ..., n vähim ühiskordne. Võrdusest (9.14) avaldame muutuja x ja selle diferentsiaali dx.

Näide 9.1. Leiame integraali $\int \frac{\sqrt[3]{x-1}}{1+\sqrt{x-1}} dx$.

Siin on avaldise $x-1$ juurijate vähimaks ühiskordseks $2 \cdot 3 = 6$. Seega muutuja vahetuseks (9.14) on selles integraalis $x-1 = t^6$, millest $x = t^6+1$, $dx = 6t^5 dt$, $\sqrt[3]{x-1} = t^2$, $\sqrt{x-1} = t^3$ ja (silmas pidades hilisemat tagasiasendust) $t = \sqrt[6]{x-1}$. Vajalike asenduste abil saame ratsionaalavaldise integraali

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1}}{1+\sqrt{x-1}} dx = \int \frac{t^2 \cdot 6t^5 dt}{1+t^3} = 6 \int \frac{t^7 dt}{1+t^3}.$$

Integreeritavaks funktsiooniks on selles ratsionaalne liigmurd, millest kõigepealt täisosa eraldamisel saame

$$\frac{t^7dt}{1+t^3} = t^4 - t + \frac{t}{1+t^3}.$$

Saadud võrduse paremal pool oleva ratsionaalse lihtmurru integreerimiseks kasutame osamurdudeks lahutust

$$\frac{t}{1+t^3} \equiv \frac{t}{(1+t)(1-t+t^2)} \equiv \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{1-t+t^2} \equiv \frac{A(1-t+t^2)+(Bt+C)(1+t)}{(1+t)(1-t+t^2)}.$$

Siit saame lugejate samasuse

$$(A+B)t^2 + (B+C-A)t + A + C \equiv t,$$

millest muutuja t vastavate astmete kordajate võrdsuse tõttu kirjutame välja võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B+C-A=1 \\ A+C=0. \end{cases}$$

Süsteemi lahenditeks on $A=-\frac{1}{3}$, $B=\frac{1}{3}$ ja $C=\frac{1}{3}$. Kasutades saadud tulemusi, leiame

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1}}{1+\sqrt{x-1}}dx = 6\int (t^4-t)dt + 6\int \frac{tdt}{1+t^3}$$
$$= \frac{6t^5}{5} - \frac{6t^2}{2} + 6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\int\frac{dt}{t+1} + 6\cdot\frac{1}{3}\int\frac{(t+1)dt}{t^2-t+1}$$
$$= \frac{6t^5}{5} - 3t^2 - 2\ln|t+1| + \int\frac{2t+2}{t^2-t+1}dt = \frac{6t^5}{5} - 3t^2 - 2\ln|t+1| + \int\frac{2t-1+3}{t^2-t+1}dt$$
$$\frac{6t^5}{5} - 3t^2 - 2\ln|t+1| + \int\frac{2t-1}{t^2-t+1}dt + 3\int\frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$
$$= \frac{6t^5}{5} - 3t^2 - 2\ln|t+1| + \ln(t^2-t+1) + 3\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C$$
$$= \frac{6t^5}{5} - 3t^2 + \ln\frac{t^2-t+1}{(t+1)^2} + 2\sqrt{3}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C$$
$$= \frac{6\sqrt[6]{(x-1)^5}}{5} - 3\sqrt[3]{x-1} + \ln\frac{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[6]{x-1}+1}{\left(\sqrt[6]{x-1}+1\right)^2} + 2\sqrt{3}\arctan\frac{2\sqrt[6]{x-1}-1}{\sqrt{3}} + C.$$

9.2 Integraal $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$. Euleri asendused

Olgu antud irratsionaalavldise integraal

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx. \tag{9.15}$$

Sellist intgraali on alati võimalik leida Euleri asenduste abil.

9.2.1. Euleri esimene asendus

Kui integraali (9.15) juurealuse avaldise ruutliikme kordaja $a>0$, siis kasutatakse Euleri esimest asendust

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - x\sqrt{a}. \tag{9.16}$$

Tõstes võrduses (9.16) mõlemad pooled ruutu, saame $ax^2+bx+c=t^2-2\sqrt{a}tx+ax^2$, millest saame avaldada muutuja $x=\dfrac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}t}$ ja selle diferentsiaali dx, mis on samuti ratsionaalavaldis t suhtes. Seega saame integraali (9.15) asendusega (9.16) teisendada ratsionaalavaldise integraaliks.

Näide 9.2. Leiame integraali $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$.

Siin $a=1$, st integreerimiseks kasutame asendust $\sqrt{x^2+2x+3}=t-x$. Siit järeldub, et $x^2+2x+3=t^2-2tx+x^2$ ehk

$$x=\frac{t^2-3}{2(1+t)}.$$

Seega

$$\sqrt{x^2+2x+3}=t-\frac{t^2-3}{2(1+t)}=\frac{t^2+2t+3}{2(1+t)}$$

ja

$$dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{2t(1+t)-t^2+3}{(1+t)^2}dt=\frac{t^2+2t+3}{2(1+t)^2}dt.$$

Asendades leitud suurused integraali, saame

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}=\int\frac{\frac{(t^2+2t+3)dt}{2(1+t)^2}}{\frac{t^2+2t+3}{2(1+t)}}=\int\frac{dt}{1+t}=\ln|1+t|+C.$$

Tagasiasendus $t=x+\sqrt{x^2+2x+3}$ annab tulemuseks

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}=\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}|+C.$$

9.2.2. Euleri teine asendus Kui integraalis (9.15) $a<0$ siis peab ruutkolmliige ax^2+bx+c rahuldama tingimust $b^2-4ac\geq 0$, sest vastasel korral ruutkolmliikmel nullkohad puuduksid, st $ax^2+bx+c<0$ kõigi x väärtuste korral ja ruutjuur ei omaks mõtet. Seega on ruutkolmliikmel olemas reaalsed nullkohad x_1 ja x_2, st $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. Integraali (9.15) ratsionaliseerimiseks kasutatakse Euleri teist asendust

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\alpha), \tag{9.17}$$

kus α on üks nullkohtadest x_1 või x_2. Oletame konkreetsuse mõttes, et $\alpha=x_1$. Tõstes võrduse (9.17) mõlemad pooled ruutu, saame $ax^2+bx+c=t^2(x-x_1)^2$ ehk $a(x-x_2)=t^2(x-x_1)$, millest

$$x=\frac{t^2x_1-ax_2}{t^2-a}$$

ja ilmselt on ka diferentsiaali dx avaldis t suhtes ratsionaalne.

Näide 9.2. Leiame integraali $\displaystyle\int\frac{(x-1)dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$.

Siin juurealuse funktsiooni nullkohad $x_1=1$ ja $x_2=-1$ ning Euleri teiseks asenduseks sobib $\sqrt{1-x^2}=t(x-1)$. Ruutu tõstes saame $-(x-1)(x+1)=t^2(x-1)^2$ ehk $x+1=t^2(1-x)$, millest

$$x=\frac{t^2-1}{t^2+1},\qquad x+1=\frac{2t^2}{t^2+1}$$

ja
$$dx = \frac{4tdt}{(t^2+1)^2}.$$
Integraalis esineva $x-1$ jätame muutuja t kaudu avaldamata, sest on ilmne, et asendamisel see taandub. Tehes vajalikud teisendused, leiame
$$\int \frac{(x-1)dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{(x-1)\frac{4tdt}{(t^2+1)^2}}{\frac{2t^2}{t^2+1}t(x-1)}$$
$$= \int \frac{(t^2+1)4tdt}{2t^3(t^2+1)^2} = \int \frac{2dt}{t^2(t^2+1)}.$$
Saadud integreeritava funktsiooni lahutame osamurdudeks
$$\frac{2}{t^2(t^2+1)} \equiv \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{Ct+D}{t^2+1},$$
millest järeldub, et
$$At(1+t^2) + B(1+t^2) + (Ct+D)t^2 \equiv 2$$
ehk
$$(A+C)t^3 + (B+D)t^2 + At + B \equiv 2.$$
Vastavate muutuja t astmete kordajate võrdsuse tõttu saame võrrandisüsteemi
$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=0 \\ A=0 \\ B=2, \end{cases}$$
millest $A=0,\ B=2,\ C=0$ ja $D=-2$. Seega
$$\int \frac{(x-1)dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = \int \left(\frac{2}{t^2} - \frac{2}{t^2+1}\right) dt$$
$$= -\frac{2}{t} - 2\arctan t + C.$$
Tagasiasendusega $t = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-1} = -\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}$ saame
$$\int \frac{(x-1)dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = \frac{2(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} + 2\arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x} + C$$
$$= 2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + 2\arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$
Märkus. Euleri teine asendus (9.17) on rakendatav ka juhul $a>0$, kui ruutkolmliikmel on olemas reaalsed nullkohad.

9.2.3. Euleri kolmas asendus

Kui integraalis (9.15) $c \geq 0$, kasutatakse selle ratsionaliseerimiseks Euleri kolmandat asendust
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = tx - \sqrt{c}. \tag{9.18}$$

Sellisel juhul $ax^2+bx+c=t^2x^2-2\sqrt{c}tx+c$ ehk pärast c koondamist ja muutujaga x jagamist $ax+b=t^2x-2\sqrt{c}t$, millest

$$x=\frac{b+2\sqrt{c}t}{t^2-a}$$

ja ilmselt on ka dx avaldis ratsionaalne muutuja t suhtes.

Näide 9.3. Leiame integraali $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x-x^2}}$.

Siin $a<0$, seega Euleri esimene asendus ei ole kasutatav. Juure all oleva ruuttkolmliikme nullkohad on irratsionaalsed $\left(\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)$, järelikult on Euleri teise asenduse kasutamine seotud küllaltki tülikate teisendustega. Sobiv on Euleri kolmas asendus (9.18)

$$\sqrt{1+x-x^2}=tx-1.$$

Sellisel juhul

$$1+x-x^2=t^2x^2-2tx+1,$$
$$x(1-x)=x(t^2x-2t),$$

millest

$$x=\frac{2t+1}{t^2+1},\qquad x+1=\frac{t^2+2t+2}{t^2+1},$$
$$dx=-\frac{2(t^2+t-1)}{(t^2+1)^2}dt$$

ja

$$\sqrt{1+x-x^2}=t\cdot\frac{2t+1}{t^2+1}-1=\frac{t^2+t-1}{t^2+1}.$$

Asendades leitud suurused integraali, leiame

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x-x^2}}=\int\frac{\frac{2(t^2+t-1)}{(t^2+1)^2}dt}{\frac{t^2+2t+2}{t^2+1}\cdot\frac{t^2+t-1}{t^2+1}}$$
$$=-2\int\frac{dt}{t^2+2t+2}=-2\int\frac{dt}{1+(t+1)^2}=-2\arctan(t+1)+C.$$

Tagasiasendusega $t=\dfrac{1+\sqrt{1+x-x^2}}{x}$ saame tulemuseks

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x-x^2}}=-2\arctan\frac{1+x+\sqrt{1+x-x^2}}{x}+C.$$

9.3 Integraal $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$. Trigonomeetrilised asendused

Euleri asendused on integraali (9.15) leidmisel alati rakendatavad, kuid sarnaselt universaalse asendusega $t=\tan\dfrac{x}{2}$ trigonomeetriliste avaldiste integreerimiseks tekivad ka siin paljudel juhtudel keerukad teisendused, mida on võimalik vältida spetsiaalseid muutuja vahetusi kasutades.

Viimastest vaatleme trigonomeetrilisi asendusi integraali (9.15) leidmiseks.
Alati on võimalik juurealusest avaldisest eraldada kaksliikme ruut teisendustega

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c - \frac{b^2}{4a} \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}
\end{aligned}
$$

Tähistades $k = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$, saame integraalist (9.15) lineaarse muutuja vahetusega $t = x + \dfrac{b}{2a}$, $dt = dx$ (integreerimismuutuja tähistame uuesti x-ga)

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + k})dx \tag{9.19}$$

Integraalis (9.19) on sõltuvalt ruutliikme kordaja a ja vabaliikme k märkidest kolm võimalust.
9.3.2 Esiteks olgu mõlemad kordajad a ja k on positiivsed. Siis saame integraali (9.19) kirjutada kui

$$\int R(x, \sqrt{a^2x^2 + k^2})dx.$$

Irrastionaalsusest vabanemiseks kasutatakse muutuja vahetust

$$x = \frac{k}{a}\tan t, \tag{9.20}$$

millest

$$dx = \frac{kdt}{a\cos^2 t}$$

ja

$$\sqrt{a^2x^2 + k^2} = \sqrt{k^2\tan^2 t + k^2} = \frac{k}{\cos t}$$

Näide 9.4. Leiame integraali $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+2}}$. Tehes siin muutuja vahetuse (9.20) $x = \sqrt{2}\tan t$ saame, et

$$dx = \frac{\sqrt{2}dt}{\cos^2 t}, \quad \sqrt{x^2+2} = \sqrt{2\tan^2 t + 2} = \frac{\sqrt{2}}{\cos t}$$

ja

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+2}} = \int \frac{\sqrt{2}dt}{2\tan^2 t \frac{\sqrt{2}}{\cos t}\cos^2 t} = \frac{1}{2}\int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t}.$$

Viimase integraali leidmiseks teeme muutuja vahetuse $z = \sin t$. Siis $dz = \cos t dt$ ja

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{2z} + C = -\frac{1}{2\sin t} + C$$

$$= -\frac{1}{\frac{2\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}}} + C = -\frac{\sqrt{1+\tan^2 t}}{2\tan t} + C = -\frac{\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}}{2\cdot\frac{x}{\sqrt{2}}} + C = -\frac{\sqrt{2+x^2}}{2x} + C.$$

9.3.2 Teiseks olgu $a < 0$ ja $k > 0$. Sel juhul on integraal (9.19) esitatav kui

$$\int R(x, \sqrt{k^2 - a^2x^2})dx.$$

Irratsionaalsusest vabanemiseks kasutatakse muutuja vahetust

$$x = \frac{k}{a}\sin t, \tag{9.21}$$

mille korral

$$dx = \frac{k}{a}\cos t dt$$

ja

$$\sqrt{k^2 - a^2x^2} = \sqrt{k^2 - k^2\sin^2 t} = k\cos t.$$

Näide 9.5. Leiame integraali $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$.

Muutuja vahetusega (9.21) $x = \sin t$ saame, et $dx = \cos t dt$, $\sqrt{1-x^2} = \cos t$ ja

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx = \int \frac{\cos t \cos t dt}{\sin^2 t} = \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt = \int \frac{dt}{\sin^2 t} - \int dt$$
$$= -\cot t - t + C = -\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} - t + C = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + C.$$

9.3.3 Kolmandaks olgu $a > 0$ ja $k < 0$. Siis on (9.19) esitatav integraalina

$$\int R(x, \sqrt{a^2x^2 - k^2})dx.$$

Selles kasutatakse irratsionaalsusest vabanemiseks muutuja vahetust

$$x = \frac{k}{a\sin t}, \tag{9.22}$$

mille korral

$$dx = -\frac{k\cos t dt}{a\sin^2 t}$$

ja

$$\sqrt{a^2x^2 - k^2} = \sqrt{\frac{k^2}{\sin^2 t} - k^2} = k\sqrt{\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}} = \frac{k\cos t}{\sin t}.$$

Näide 9.6. Leiame integraali $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}dx$.

Muutja vahetusega (9.22) $x = \frac{2}{\sin t}$ saame, et

$$dx = -\frac{2\cos t}{\sin^2 t}dt, \quad \sqrt{x^2-4} = \frac{2\cos t}{\sin t}$$

ja

$$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}dx = \int \frac{\frac{2\cos t}{\sin t}}{\frac{4}{\sin^2 t}}\left(-\frac{2\cos t}{\sin^2 t}\right)dt = -\int \frac{\cos^2 t dt}{\sin t}$$
$$= -\int \frac{1-\sin^2 t}{\sin t}dt = \int \sin t dt - \int \frac{dt}{\sin t} = -\cos t - \int \frac{dt}{\sin t}.$$

Järelejäänud integraali leidmiseks teeme muutuja vahetuse $z = \tan\frac{t}{2}$, millest $dt = \frac{2dz}{1+z^2}$ ja $\sin t = \frac{2z}{1+z^2}$ ja

$$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}dx = -\cos t - \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2}} = -\cos t - \int \frac{dz}{z}$$
$$= -\cos t - \ln|z| + C = -\cos t - \ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + C.$$

Tagasiasenduste jaoks leiame $\sin t = \frac{2}{x}$,

$$\cos t = \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}$$

ja

$$\tan\frac{t}{2} = \frac{\sin t}{1+\cos t} = \frac{2}{x+\sqrt{x^2-4}}.$$

Seega

$$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{x^2-4}}{x} - \ln\left|\frac{2}{x+\sqrt{x^2-4}}\right| + C = -\frac{\sqrt{x^2-4}}{x} + \ln|x+\sqrt{x^2-4}| + C.$$

Siin $-\ln 2 + C$ on asendatud uuesti suvalise konstandiga C.

9.4 Diferentsiaalbinoomi integreerimine

Diferentsiaalbinoomiks nimetatalse avaldist

$$x^\alpha(ax^\beta + b)^\gamma,$$

milles α, β ja γ on ratsionaalarvud, aga a ja b on suvalised reaalarvud. Diferentsiaalbinoomi integraali

$$\int x^\alpha(ax^\beta + b)^\gamma dx \tag{9.23}$$

saab teisendada ratsionaalavaldise integraaliks kolmel juhul.

Kui γ on täisarv teiseneb (9.23) ratsionaalavldise integraaliks muutuja vahetusega $x = t^n$, kus n on murdude α ja β ühine nimetaja.

Näide 9.7. Leiame integraali $\int \sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)^2dx$.

Selles diferentsiaalbinoomis $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{3}$ ja $\gamma = 2$, järelikult saab avaldise teisendada ratsionaalseks muutuja vahetusega $x = t^6$. Siis $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$, $dx = 6t^5dt$ ja

$$\int \sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)^2dx = 6\int t^3(t^2+1)^2t^5dt = 6\int(t^{12} + 2t^{10} + t^8)dt$$
$$= \frac{6t^{13}}{13} + \frac{12t^{11}}{11} + \frac{2t^9}{3} + C = \frac{1}{13}x^2\sqrt[6]{x} + \frac{12}{11}x\sqrt[6]{x^5} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C.$$

Kui $\dfrac{\alpha+1}{\beta}$ on täisarv teiseneb (9.23) ratsionaalavldise integraaliks muutuja vahetusega $ax^\beta + b = t^n$, kus n on murru γ nimetaja.

Näide 9.8. Leiame integraali $\displaystyle\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Selles diferentsiaalbinoomis $\alpha = 5$, $\beta = 2$, $\gamma = -\dfrac{1}{2}$ ja $\dfrac{\alpha+1}{\beta} = 3$, seega saab avaldise teisendada ratsionaalseks muutuja vahetusega $1 - x^2 = t^2$. Siit avaldame $x^2 = 1 - t^2$, $xdx = -tdt$, $x^5 dx = x^4 \cdot xdx = -(1-t^2)^2 tdt$ ja

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{(1-t^2)^2 tdt}{t} = -\int (1 - 2t^2 + t^4)dt$$
$$= -t + \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + C = -\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{5}(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2} + C.$$

Kui $\dfrac{\alpha+1}{\beta} + \gamma$ on täisarv teiseneb (9.23) ratsionaalavldise integraaliks muutuja vahetusega $a + bx^{-\beta} = t^n$, kus n on murru γ nimetaja.

Näide 9.9. Leiame integraali $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(2+x^3)^{2/3}}$.

Integreeritavas diferentsiaaalbinoomis $\alpha = -2$, $\beta = 3$ ja $\gamma = -\dfrac{2}{3}$. Seega $\dfrac{\alpha+1}{\beta} + \gamma = -1$ ja avaldise saab teisendada ratsionaalseks muutuja vahetusega $1 + 2x^{-3} = t^3$. Siit $x^3 = \dfrac{2}{t^3-1}$ ja $x^2 dx = -\dfrac{2t^2 dt}{(t^3-1)^2}$. Teisendades integraali lugejasse $x^2 dx$, saame

$$\int \frac{dx}{x^2(2+x^3)^{2/3}} = \int \frac{x^2 dx}{x^4(2+x^3)^{2/3}}.$$

Edasi avaldame t kaudu saadud nimetaja. Muutuja vahetusest $2 + x^3 = x^3 t^3$, millest $(2+x^3)^{\frac{2}{3}} = x^2 t^2$ ja

$$x^4(2+x^3)^{\frac{2}{3}} = x^6 t^2 = \left(\frac{2}{t^3-1}\right)^2 t^2 = \frac{4t^2}{(t^3-1)^2}.$$

Asendades lugeja ja nimetaja, leiame

$$\int \frac{dx}{x^2(2+x^3)^{2/3}} = \int \frac{-\frac{2t^2 dt}{(t^3-1)^2}}{\frac{4t^2}{(t^3-1)^2}} = -\frac{1}{2}\int dt$$
$$= -\frac{1}{2}t + C = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x^3}} + C = -\frac{\sqrt[3]{x^3+2}}{2x} + C.$$

Vene matemaatik P. L. Tšebõšov on näidanud, et vaadeldud kolm juhtu on ainsad, mille korral diferentsiaalbinoomil on elemetaarfunktsioonide hulgas olemas algfunktsioon.

10 Mitte-elementaarsed integraalid

Elementaarfunktsioonide diferentseerimiseks on olemas kindlad reeglid ja iga elementeerfunktsiooni tuletist on võimalik nende järgi leida, ükskõik kui keerulise avaldisega meil ka tegemiset ei oleks. Kuid juba paljudel lihtsatel juhtudel ei ole elementaarfunktsiooni $f(x)$ integraal

$$\int f(x)dx$$

elementaarfunktsioonide kaudu lõplikul kujul väljendatav. Sellisteks on näiteks integraalid

$$\operatorname{si} x = \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \operatorname{ci} x = \int \frac{\cos x}{x} dx, \quad \text{ja} \ \operatorname{li} x = \int \frac{dx}{\ln x},$$

mida nimetatakse vastavalt *integraalsiinuseks*, *integraalkoosinuseks* ja *integraallogaritmiks*. Nende funktsioonide väärtused on tabuleeritud ja seepärast saab neid funktsioone nii integreerimisel kui ka arvutustes sama edukalt kasutada, nagu harilikku siinust, koosinust ja logaritmi. Ka integraal

$$\int e^{-x^2} dx$$

ei avaldu lõplikul kujul elementaarfunktsioonide kaudu. Kuid funktsiooni

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-x^2/2} dx + C,$$

mis rahuldab tingimust $\Phi(0) = 0$, nimetatakse Laplace'i funktsiooniks ja seda on põhjalikult uuritud ning selle väärtused samuti tabuleritud.
Rakendustes esinevad sageli veel integraalid

$$\int R(x, \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d})dx, \tag{10.24}$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e})dx, \tag{10.25}$$

mis on elementaarfunktsioonide kaudu avaldatavad ainult erijuhtudel. Kui need integraalid ei kujuta elementaarfunktsioone, nimetatakse neid *elliptilisteks integraalideks*.

11 Ülesanded

Vahetu integreerimine

11.1. $\displaystyle\int \left(x + \sqrt{x}\right) dx.$ Vastus: $\displaystyle\frac{x^2}{2} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C.$

11.2. $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x\sqrt{x}} + 2\right) dx.$ Vastus: $\displaystyle -\frac{1}{x} - \frac{8}{\sqrt{x}} + 2x + C.$

11.3. $\displaystyle\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx.$ Vastus: $\displaystyle\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 4\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C.$

11.4. $\displaystyle\int (\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)dx$ Vastus: $\displaystyle\frac{2x^2\sqrt{x}}{5} - x + C.$

11.5. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx.$ Vastus: $\displaystyle\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C.$

11.6. $\displaystyle\int \cot^2 x dx.$ Vastus: $-\cot x - x + C.$

11.7. $\displaystyle\int \frac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{2^x}dx.$ Vastus: $3x - \dfrac{2\cdot(1,5)^x}{\ln 1,5} + C.$

11.8. $\displaystyle\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx.$ Vastus: $\dfrac{1}{2}(\tan x + x) + C.$

11.9. $\displaystyle\int \frac{(1+2x^2)dx}{x^2(1+x^2)}.$ Vastus: $\arctan x - \dfrac{1}{x} + C.$

11.10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}}.$ Vastus: $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arcsin x + C.$

11.11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}.$ Vastus: $\ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right) + C.$

11.12. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-5}.$ Vastus: $\dfrac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{5}-x}{\sqrt{5}+x}\right| + C.$

11.13. $\int \operatorname{th}^2 x dx.$ Vastus: $x - \operatorname{th} x + C.$

Integreerimine muutuja vahetusega (diferentsiaali märgi alla viimisega)

11.14. $\displaystyle\int (x+1)^{11}dx.$ Vastus: $\dfrac{(x+1)^{12}}{12} + C.$

11.15. $\displaystyle\int \sqrt{5-2x}dx.$ Vastus: $-\dfrac{(5-2x)\sqrt{5-2x}}{3} + C.$

11.16. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}dx.$ Vastus: $\dfrac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + C.$

11.17. $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^4+3}}.$ Vastus: $\dfrac{1}{2}\sqrt{x^4+3} + C.$

11.18. $\displaystyle\int \cos(5x-2)dx.$ Vastus: $\dfrac{1}{5}\sin(5x-2) + C.$

11.19. $\displaystyle\int \tan x dx.$ Vastus: $-\ln|\cos x| + C.$

11.20. $\displaystyle\int \sin^4 x\cos x dx.$ Vastus: $\dfrac{1}{5}\sin^5 x + C.$

11.21. $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx.$ Vastus: $-\ln(1+\cos^2 x) + C.$

11.22. $\displaystyle\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}dx.$ Vastus: $\dfrac{\tan^2 x}{2} + C.$

11.23. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{1+\cot x}}.$ Vastus: $-2\sqrt{1+\cot x} + C.$

11.24. $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{e^x+2}.$ Vastus: $\ln(e^x+2) + C.$

11.25. $\int xe^{-x^2}dx.$ Vastus: $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C.$

11.26. $\int \cos x e^{\sin x}dx.$ Vastus: $e^{\sin x}+C.$

11.27. $\int 2^{3x-1}dx.$ Vastus: $\frac{2^{3x-1}}{3\ln 2}+C.$

11.28. $\int \frac{\ln x}{x}dx.$ Vastus: $\frac{\ln^2 x}{2}+C.$

11.29. $\int \frac{dx}{x\ln x}.$ Vastus: $\ln|\ln x|+C.$

11.30. $\int \frac{dx}{1+4x^2}.$ Vastus: $\frac{1}{2}\arctan 2x+C.$

11.31. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}.$ Vastus: $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2}+C.$

11.32. $\int \frac{xdx}{x^4+1}.$ Vastus: $\frac{1}{2}\arctan x^2+C.$

11.33. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}.$ Vastus: $\arctan e^x+C.$

11.34. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$ Vastus: $\arcsin e^x+C.$

11.35. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\arctan x}.$ Vastus: $\ln|\arctan x|+C.$

11.36. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}.$ Vastus: $\arcsin(\ln x)+C.$

11.37. $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x}dx.$ Vastus: $e^x+e^{-x}+C.$

11.38. $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$ Vastus: $\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C.$

11.39. $\int \frac{3x-1}{x^2+4}dx.$ Vastus: $\frac{3}{2}\ln(x^2+4)-\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+C.$

11.40. $\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx.$ Vastus: $-2\sqrt{1-x^2}-\frac{2\arcsin x\sqrt{\arcsin x}}{3}+C.$

11.41. $\int \frac{\operatorname{ch} x}{1+\operatorname{sh} x}dx.$ Vastus: $\ln|1+\operatorname{sh} x|+C.$

11.42. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x}.$ Vastus: $\ln|\operatorname{th} x|+C.$

11.43. $\int \operatorname{sh}^3 x dx$. Vastus: $\dfrac{\operatorname{ch}^3 x}{3} - \operatorname{ch} x + C$.

Ositi integreerimine

11.44. $\displaystyle\int xe^{-x}dx$. Vastus: $-xe^{-x} - e^{-x} + C$.

11.45. $\displaystyle\int (x+2)\sin 2xdx$. Vastus: $-\dfrac{x+2}{2}\cos 2x + \dfrac{1}{4}\sin 2x + C$.

11.46. $\displaystyle\int x\cos\frac{x}{2}dx$. Vastus: $2x\sin\dfrac{x}{2} + 4\cos\dfrac{x}{2} + C$.

11.47. $\displaystyle\int x3^x dx$. Vastus: $\dfrac{x\cdot 3^x}{\ln 3} - \dfrac{3^x}{\ln^2 3} + C$.

11.48. $\displaystyle\int x\operatorname{sh} xdx$. Vastus: $x\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x + C$

11.49. $\displaystyle\int \ln xdx$. Vastus: $x\ln x - x + C$.

11.50. $\displaystyle\int \arccos xdx$. Vastus: $x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$.

11.51. $\displaystyle\int x\arctan xdx$. Vastus: $\dfrac{1}{2}\left[(x^2+1)\arctan x - x\right] + C$.

11.52. $\displaystyle\int \ln(x^2+1)dx$. Vastus: $x\ln(x^2+1) - 2x + 2\arctan x + C$.

11.53. $\displaystyle\int \arctan\sqrt{x}dx$. Vastus: $(x+1)\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$.

11.54. $\displaystyle\int x^2\ln(1+x)dx$ Vastus: $\dfrac{(x^3+1)\ln(1+x)}{3} - \dfrac{x^3}{9} + \dfrac{x^2}{6} - \dfrac{x}{3} + C$.

11.55. $\displaystyle\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$. Vastus: $2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + C$.

11.56. $\displaystyle\int x\tan^2 xdx$. Vastus: $x\tan x - \dfrac{x^2}{2} + \ln|\cos x| + C$.

Täisosa eraldamine

11.57. $\displaystyle\int \frac{x}{2x+1}dx$. Vastus: $\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\ln|2x+1| + C$.

11.58. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{3x+2}dx$. Vastus: $\dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{9}\ln|3x+2| + C$.

11.59. $\displaystyle\int \frac{(1+x)^2}{x^2+1}dx$. Vastus: $x + \ln(x^2+1) + C$.

11.60. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^2+1}dx$. Vastus: $x - 2\arctan x + C$.

11.61. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x+1}dx.$ Vastus: $\displaystyle\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln|x+1|+C.$

11.62. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{9-x^2}.$ Vastus: $\displaystyle\frac{3}{2}\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right|-x+C.$

11.63. $\displaystyle\int \frac{x^5}{x^3-1}dx.$ Vastus: $\displaystyle\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}\ln|x^3-1|+C.$

Ratsionaalavaldiste integreerimine

11.64. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2-3x+2}dx.$ Vastus: $3\ln|x-2|-\ln|x-1|+C.$

11.65. $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x^2+x}dx.$ Vastus: $2\ln|x|+\ln|x+1|+C.$

11.66. $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx.$ Vastus: $3\ln|x-1|-7\ln|x-2|+5\ln|x-4|+C.$

11.67. $\displaystyle\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}.$ Vastus: $\displaystyle\frac{2}{33}\ln|2x-3|+\frac{3}{11}\ln|3x+1|-\frac{1}{3}\ln|x|+C.$

11.68. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2-4)}dx.$ Vastus: $\displaystyle\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+\frac{5}{12}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C.$

11.69. $\displaystyle\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx.$ Vastus: $\displaystyle\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C.$

11.70. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x-1)^2}.$ Vastus: $\displaystyle\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|-\frac{1}{x-1}+C.$

11.71. $\displaystyle\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}dx.$ Vastus: $\displaystyle\frac{3}{x-2}+\ln\left(\frac{x-2}{x}\right)^2+C.$

11.72. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}dx.$ Vastus: $\displaystyle\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+C.$

11.73. $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x(x^2+1)}dx.$ Vastus: $\displaystyle\ln\frac{x^2+1}{x^2}+3\arctan x+C.$

11.74. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+2x+2)}.$ Vastus: $\displaystyle\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{4}\ln(x^2+2x+2)-\frac{1}{2}\arctan(x+1)+C.$

11.75. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$ Vastus: $\displaystyle\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$

11.76. $\displaystyle\int \frac{3x^2+5x+12}{x^4+4x^2+3}dx.$ Vastus: $\displaystyle\frac{5}{4}\ln(x^2+1)-\frac{5}{4}\ln(x^2+3)+\frac{9}{2}\arctan x-\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$

Trigonomeetriliste funktsioonide integreerimine

11.77. $\displaystyle\int \frac{dx}{4+5\cos x}.$ Vastus: $\displaystyle\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+3}{\tan\frac{x}{2}-3}\right|+C.$

11.78. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\cos x)\sin x}$. Vastus: $\displaystyle\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2} + C.$

11.79. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$. Vastus: $\displaystyle\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)\right| + C.$

11.80. $\displaystyle\int \frac{dx}{5 - 4\sin x + 3\cos x}$. Vastus: $\displaystyle\frac{1}{2-\tan\frac{x}{2}} + C.$

11.81. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x}$. Vastus: $\displaystyle\frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{8}\cot^2\frac{x}{2} + C.$

11.82. $\displaystyle\int \frac{\tan x}{1-2\tan x}dx$. Vastus: $\displaystyle -\frac{1}{5}\ln|2\sin x - \cos x| - \frac{2}{5}x + C.$

11.83. $\displaystyle\int \frac{dx}{\tan x\cos 2x}$. Vastus: $\displaystyle\ln\frac{|\sin x|}{\sqrt{\cos 2x}} + C.$

11.84. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^6 x}$. Vastus: $\displaystyle\tan x + \frac{2}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + C.$

11.85. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$. Vastus: $\displaystyle\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2}\tan x) + C.$

11.86. $\displaystyle\int \frac{\sin x dx}{(1-\cos x)^2}$. Vastus: $\displaystyle\frac{1}{\cos x - 1} + C.$

11.87. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^4 x}$. Vastus: $\displaystyle\frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.$

11.88. $\displaystyle\int \frac{\tan x dx}{1+\cos x}$. Vastus: $\displaystyle\ln\left|\frac{1+\cos x}{\cos x}\right| + C.$

11.89. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^2 x + 1}$. Vastus: $\cos x - 2\arctan(\cos x) + C.$

11.90. $\displaystyle\int \sin^2 x dx$. Vastus: $\displaystyle\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

11.91. $\displaystyle\int \cos^4 x dx$. Vastus: $\displaystyle\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$

11.92. $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^2 x dx$. Vastus: $\displaystyle\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$

11.93. $\displaystyle\int \sin^6 x dx$. Vastus: $\displaystyle\frac{5}{16}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$

11.94. $\displaystyle\int \sin 5x\sin 3x dx$. Vastus: $\displaystyle\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C.$

11.95. $\displaystyle\int \cos 2x\cos x dx$. Vastus: $\displaystyle\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{6}\sin 3x + C.$

11.96. $\int \sin 4x \cos 3x dx$. Vastus: $-\frac{1}{14}\cos 7x - \frac{1}{2}\cos x + C$.

Ratsionaalavaldiste e^x suhtes integreerimine

11.97. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$. Vastus: $\arctan e^x + C$.

11.98. $\int \frac{e^{2x} dx}{e^x+1}$. Vastus: $e^x - \ln(e^x+1) + C$.

11.99. $\int \frac{dx}{e^x+e^{2x}}$. Vastus: $\ln(1+e^x) - e^{-x} - x + C$.

11.100. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}-6e^x+13}$. Vastus: $\frac{1}{2}\arctan\frac{e^x-3}{2} + C$.

Irratsionaalavaldiste integreerimine

11.101. $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)}dx$. Vastus: $2\arctan\sqrt{x} + C$.

11.102. $\int \frac{2+x}{\sqrt[3]{3-x}}dx$. Vastus: $\frac{3}{5}(3-x)\sqrt[3]{(3-x)^2} - \frac{15}{2}\sqrt[3]{(3-x)^2} + C$.

11.103. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$. Vastus: $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x}+1) + C$.

11.104. $\int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1}dx$. Vastus: $x - 2\sqrt{x-1} + 2\ln(\sqrt{x-1}+1) + C$.

11.105. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}$. Vastus: $\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right| + 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C$.

Irratsionaalavaldiste integreerimine. Euleri asendused

11.106. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$. Vastus: $\arctan\frac{x+\sqrt{x^2+4x-4}}{2} + C$.

11.107. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}$. Vastus: $\ln\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{x+\sqrt{1+x+x^2}+2} + C$.

11.108. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$. Vastus: $2\ln|x+\sqrt{x^2+x+1}| - \frac{3}{2}\ln|2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}| + \frac{3}{2}\frac{1}{2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}} + C$.

11.109. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}dx$. Vastus: $\sqrt{x^2+2x} + \ln|\sqrt{x^2+2x}+x+1| + C$.

11.110. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$. Vastus: $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}(x+1)-\sqrt{2+x-x^2}}{\sqrt{2}(x+1)+\sqrt{2+x-x^2}}\right| + C$.

11.111. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$. Vastus: $\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{1-2x-x^2}}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\right| -$ $2\arctan\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x} + C$.

Irratsionaalavaldiste integreerimine. Trigonomeetrilised asendused

11.112. $\int \sqrt{2-x^2}dx$. Vastus: $\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}x\sqrt{2-x^2} + C$.

11.113. $\int x^2\sqrt{9-x^2}dx$. Vastus: $\frac{81}{8}\arcsin\frac{x}{3} - \frac{1}{8}x(9-2x^2)\sqrt{9-x^2} + C$.

11.114. $\int \sqrt{3-2x-x^2}dx$. Vastus: $2\arcsin\frac{x+1}{2} + \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{3-2x-x^2} + C$.

11.115. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Vastus: $\frac{1}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$.

11.116. $\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^4}dx$. Vastus: $-\frac{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}{12x^3} + C$.

11.117. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+16}}$. Vastus: $-\frac{\sqrt{x^2+16}}{16x} + C$.

11.118. $\int \sqrt{4x^2+4x+5}dx$. Vastus: $\ln\left(\sqrt{4x^2+4x+5}+2x+1\right) + \frac{2x+1}{4}\sqrt{4x^2+4x+5} + C$.

11.119. $\int \sqrt{x^2-3}dx$. Vastus: $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-3} + \frac{3}{2}\ln\left|x-\sqrt{x^2-3}\right| + C$.

11.120. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}dx$. Vastus: $\frac{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}{12x^3} + C$.

11.121. $\int \sqrt{9x^2-6x}dx$. Vastus: $\frac{1}{6}\ln\left|3x-1-\sqrt{9x^2-6x}\right| + \frac{1}{6}(3x-1)\sqrt{9x^2-6x} + C$.

Diferentsiaalbinoomi integreerimine

11.122. $\int \frac{dx}{x(\sqrt[3]{x}+1)^3}$. Vastus: $\ln|x| - 3\ln|\sqrt[3]{x}+1| + \frac{6\sqrt[3]{x}+9}{2(\sqrt[3]{x}+1)^2} + C$.

11.123. $\int \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}+1}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$. Vastus: $2(\sqrt[3]{x}+1)\sqrt{\sqrt[3]{x}+1} + C$.

11.124. $\int \sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^3}dx$. Vastus: $\frac{8}{77}\sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^3}(7x+3\sqrt{x}-4) + C$.

11.125. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$. Vastus: $\frac{1}{2}\ln(\sqrt[3]{x^2+1}-1) - \frac{1}{4}\ln[\sqrt[3]{(x^2+1)^2} + \sqrt[3]{x^2+1}+1] +$ $\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{2\sqrt[3]{x^2+1}+1}{\sqrt{3}} + C$.

11.126. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Vastus: $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$.

11.127. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Vastus: $-\dfrac{1+2x^2}{x\sqrt{1+x^2}}+C$.

11.128. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$. Vastus: $-\dfrac{1}{10}\dfrac{(1+x^4)^2\sqrt{1+x^4}}{x^{10}}+\dfrac{1}{3}\dfrac{(1+x^4)\sqrt{1+x^4}}{x^6}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}+C$.