1 Funktsioon, piirväärtus, pidevus

1.1 Funktsioon

1.1.1 Tähistused

Arvuhulki tähistatakse üldlevinud viisil:
$\mathbb{N}$ - naturaalarvude hulk,
$\mathbb{Z}$ - täisarvude hulk,
$\mathbb{Q}$ - ratsionaalarvude hulk,
$\mathbb{R}$ - reaalarvude hulk.

Piirkonnaks nimetatakse reaalarvude hulga alamhulki: vahemik, lõik, poollõik ja nende ühendid. Piirkondi hakkame tähistama suurte tähtedega $X,\ Y,\ Z, ...$.

Konstant on suurus, mis antud kontekstis omab ainult ühte kindlat väärtust. Konstante tähistatakse matemaatilises analüüsis tähestiku algustähtedega $a,\ b,\ c,\ ...$.

Muutuvaks suuruseks nimetatakse suurust, mis võib omandada mistahes väärtust mingisugusest piirkonnast. Muutuvid suurusi tähistatakse tähestiku lõputähtedega $x,\ y,\ z,\ ...$. Täisarvuliste muutujate tähistamiseks kasutatakse tähti $i,\ j,\ k,\ l,\ m$ ja n. Funktsioone tähistatakse tähtedega $f,\ g,\ h$ ja nende kreeka vastetega φ (fii), ψ (psii) χ (hii).

Matemaatilise analüüsi kursuses on muutuvateks suurusteks reeglina (kui ei ole tehtud täiendavat eeldust) reaalarvulised muutujad. Kirjaviisi $x \in X$ loetakse: suurus x kuulub piirkonda X.

Üldlevinud on kahe nn *kvantori* - universaalsuskvantori $\forall$ ja olemasolukvantori $\exists$ kasutamine. Sümbolit $\forall$ loetakse teksti sees "iga"ja sümbolit $\exists$ loetakse "eksisterib"või "leidub". Kirjaviisi $\forall\ x > 0\ \exists\ [a; b]$ loetakse: iga positiivse x väärtuse korral leidub lõik $[a; b]$.

1.1.2 Funktsiooni mõiste ja esitusviisid

Definitsioon 1.1. Kui igale muutuja x väärtusele mingisugusest piirkonnast X on vastavusse seatud üks muutuja y kindel väärtus piirkonnast Y, siis muutujat y nimetetakse muutuja x *funktsiooniks.*

Seda asjaolu märgitakse matemaatilise analüüsis $y = f(x)$, $y = F(x)$, $y = \varphi(x)$ jne. Muutuvat suurust x nimetatakse *sõltumatuks muutujaks* ehk *argumendiks* ja muutuvat suurust y *sõltuvaks muutujaks* ehk *funktsiooniks.* Sümbol f märgib reeglit või eeskirja, mis selle vastavuse korraldab. Seega - funktsioonist saab kõnelda siis, kui on olemas eeskiri, mis igale ühe muutuja väärtusele seab vastavusse teise muutuja ühe kindla väärtuse.

Funktsioone saab esitada tabelina, graafikuna ja analüütiliselt.

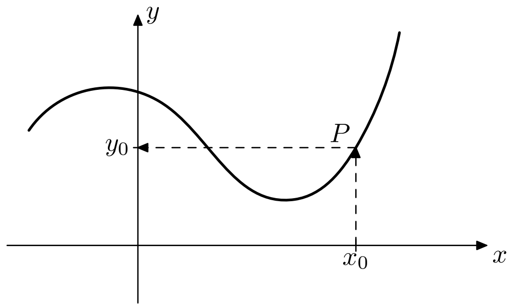
Näide 1.1. Tabel

x	y
-2	3
-1	11
0	15

esitab definitsiooni kohaselt funktsiooni, sest igale muutuja x väärtusele kolmeelemendilisest hulgast $X = \{-2,\ -1,\ 0\}$ seab see vastavusse ühe kindla muutuja y väärtuse. Muutuja x väärtusele -2 on vastavusse seatud muutuja y väärtus 3 jne.

Teiseks funktsiooni esitusviisiks on graafik.

Näide 1.2. Graafik esitab tõepoolest ülaltoodud definitsiooni mõttes



Joonis 1.1: Funktsiooni esitusviis graafikuna

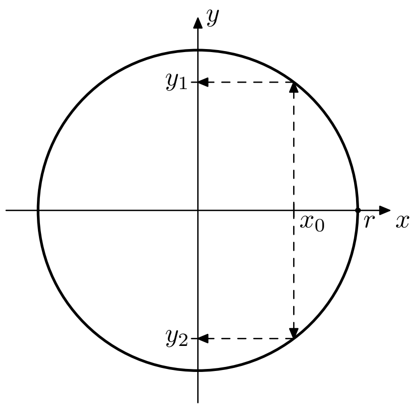
funktsiooni, sest argumendi väärtusele x_0 vastab graafiku punkt P. Selle punkti ordinaat y_0 on üheselt määratud, seega igale argumendi x väärtusele seab graafik vastavusse ühe kindla y väärtuse.

Kolmandaks funktsiooni esitusviisiks on analüütiline esitusviis. Siin eristame funktsiooni esitust ilmutatud kujul, ilmutamata kujul ja funktsiooni parameetrilist esitusviisi.

Funktsioon esitatakse ilmutatud kujul võrdusena $y = f(x)$, kus vasakul pool võrdusmärki on y ja paremal mingisugune analüütiline avaldis muutuja x suhtes. Ilmutatud kujul on kõik põhilised elementaarfunktsioonid: ruutfunktsioon $y = x^2 - 2x + 3$, trigonomeetrilised funktsioonid, eksponent- ja logaritmfunktsioonid jne.

Enne kui asuda funktsiooni ilmutamata kuju ja parameetrilise esitusviisi juurde, peab funktsiooni mõistet laiendama. Edaspidi loeme muutuja y muutuja x funktsiooniks ka juhul, kui igale x väärtusele vastab kaks y väärtust, kolm y väärtust, ... , lõpmatult palju muutuja y väärtusi. Esimesel juhul öeldakse, et funktsioon on kahene, teisel juhul - funktsioon on kolmene, ... , funktsioon on lõpmatult mitmene.

Näide 1.3. Ilmutamata kujul on funktsioon $x^2 + y^2 = r^2$, kus r on positiivne konstant. Selle funktsiooni graafikuks on ringjoon keskpunktiga koordinaatide alguses, raadiusega r. Selle funktsiooni ilmutamiseks, st tei-



Joonis 1.2: Ringjoon raadiusega r

sendamiseks ilmutatud kujule, avaldame võrdusest muutuja y. Kõigepealt $y^2 = r^2 - x^2$, millest $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Igale x väärtusele vahemikust $(-r; r)$ vastab kaks muutuja y väärtust. Joonisel vastab argumendi x_0 väärtusele kaks y väärtust $y_1 = \sqrt{r^2 - x_0^2}$ ja $y_2 = -\sqrt{r^2 - x_0^2}$. Seega on antud juhul tegemist kahese funktsiooniga. Funktsioonid $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ja $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ on selle kahese funktsiooni ühesteks harudeks. Kui ilmutatumata kujul esitatud funktsiooni graafikuks on kogu ringjoon, siis funktsiooni $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ graafikuks on ringjoone ülemine pool ja funktsiooni $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ graafikuks ringjoone alumine pool.

Kolmandaks funktsiooni analüütiliseks esitusviisiks on funktsiooni parameetriline esitusviis. Parameetrilise esitusviisi korral ei ole kaks muutujat x ja y omavahel otseselt võrdusega seotud, vaid on seotud läbi kolmanda muutuja, nn parameetri t. Parameetrilise esitusviis on üldjuhul

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

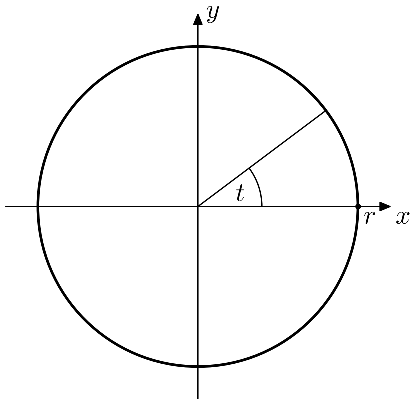
Parameetrilisel kujul on võimalik esitada kõiki funktsioone. Funktsiooni $y = x^2$ parameetriliseks esitusviisiks on

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$$

Funktsiooni $x^2 + y^2 = r^2$ parameetriliseks esitusviisiks on

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$$

Selles esitusviisis on parameetriks t joonisel näidatud nurk.



Joonis 1.3: Parameetri t tähendus

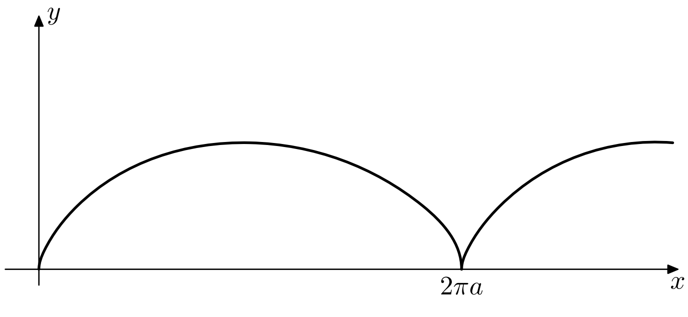
Funktsiooni $y = x^2$ parameetrilist esitusviisi tavaliselt ei kasutata, sellel puudub mõte. Küll aga kasutatakse funktsiooni $x^2 + y^2 = r^2$ parameetrilist esitusviisi.

On funktsioone, millele ainsaks mõistlikuks esitusviisiks on parameetriline esitusviis.

Näide 1.4. Vaatleme parameetrilisel kujul esitatud funktsiooni

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

Funktsiooni graafikuks on tsükliline joon, mida nimetatakse tsükloidiks. Tsükloid on joon, mille kirjeldab ringjoone raadiusega a üks punkt, mis



Joonis 1.4: Tsükloid

algasendis asub koordinaatide alguspunktis, kui panna ringjoon veerema mööda x-telge. Sellisel juhul on funktsiooni parameetrilises esitusviisis parameetriks t selle ringjoone pöördenurk algasendi suhtes.

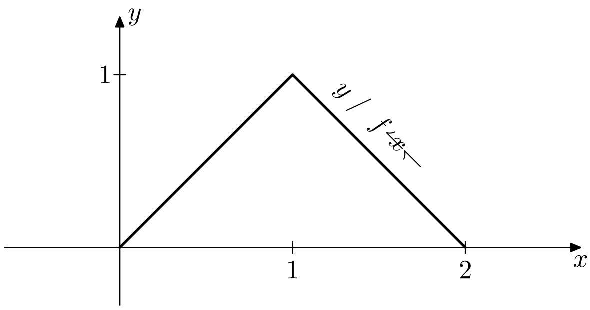
Definitsioon 1.2. Funktsiooni $y = f(x)$ määramispiirkonnaks nimetatakse niisugust argumendi x väärtuste hulka, millele antud eeskirja kohaselt saab vastavusse seada muutuja y väärtuse.

Funktsiooni määramispiirkond on kas funktsiooni definitsiooniga ette antud või funktsiooni enda poolt määratud. Funktsiooni määramispiirkonda tähistatakse sümboliga X.

Näide 1.5. Funktsiooni

$$f(x) = \begin{cases} x, & kui \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & kui \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

määramispiirkonnaks on lõik $X = [0; 2]$, sest väljaspool seda lõiku ei ole funktsioon defineeritud. Funktsiooni graafik on esitatud joonisel.



Näide 1.6. Funktsiooni $y = \sqrt{2x - x^2}$ määramispiirkonna annab ette kitsendus $2x - x^2 \geq 0$. Selle võrratuse lahendihulka kuuluvad argumendi x väärtused, mis rahuldavad tingimust $0 \leq x \leq 2$, seega antud funktsiooni määramispiirkonnaks on lõik $X = [0; 2]$.

Definitsioon 1.3. Funktsiooni $y = f(x)$ muutumispiirkonnaks nimetatakse muutuja y nende väärtuste hulka, mis vastavad kõikidele määramispiirkonda kuuluvatele argumendi x väärtustele. Muutumispiirkonda tähistatakse sümboliga Y.

Näide 1.7. Leiame näites 1.6 antud funktsiooni muutumispiirkonna. Juure all on ruutfunktsioon $2x - x^2$, mille graafikuks on allapoole avanev parabool. Määramispiirkonna $X = [0; 2]$ otspunktides on ruutfunktsiooni väärtus 0, seega on ka antud funktsiooni vähim väärtus 0. Ruutfunktsiooni suurimaks väärtuseks on parabooli haripunkti ordinaat. Parabooli haripunkti abstsiss on $x_h = \dfrac{0+2}{2} = 1$, millele vastav ordinaat on $y_h = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1$. Väärtus 1 on juure all oleva ruutfunktsiooni suurimaks väärtuseks ning ühtlasi juure suurimaks väärtuseks. Järelikult on funktsiooni muutumispiirkonnaks lõik $Y = [0; 1]$.

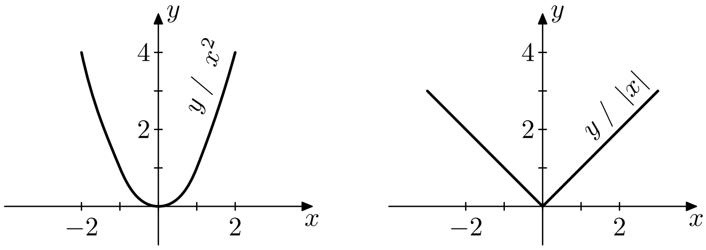
1.1.3 Funktsioonide liigitamine

Funktsioone liigitatakse nende sümmeetriaomaduste, väärtuste kordumise või mingi muu tunnuse alusel.

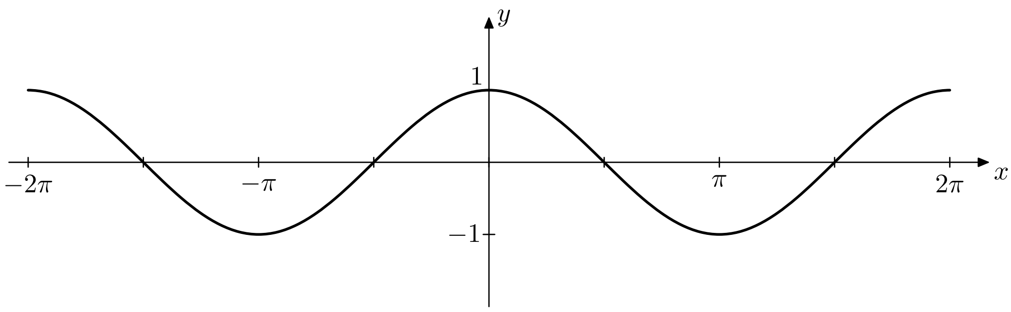
Definitsioon 1.4. Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse paarisfunktsiooniks, kui $\forall x \in X$ korral

$$f(-x) = f(x).$$

Paarisfunktsioonideks on näiteks $y = x^2$, $y = |x|$ ja $y = \cos x$. Neist kahe esimese graafikud on esitatud joonisel 1.5 ja kolmanda graafik joonisel 1.6. Kui paarisfunktsiooni graafikule kuulub punkt $(x; f(x))$, siis definitsioo-



Joonis 1.5: funktsioonid $y = x^2$ ja $y = |x|$

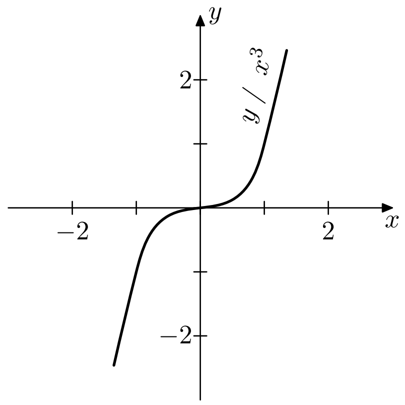


Joonis 1.6: funktsioon $y = \cos x$

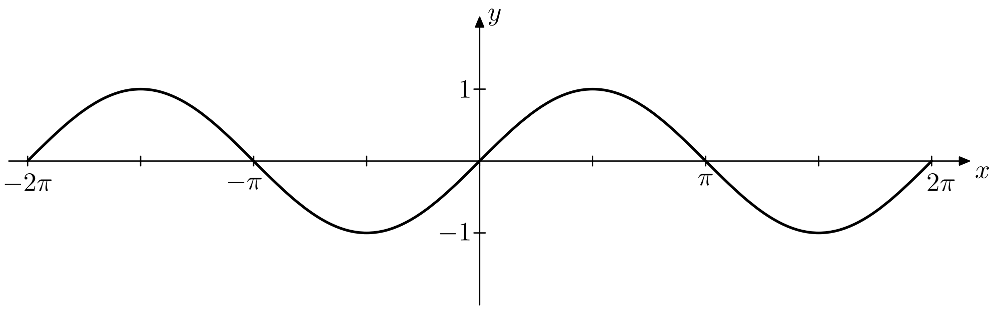
nis esitatud tingimuse kohaselt kuulub graafikule ka punkt $(-x; f(x))$. Need kaks punkti paiknevad koordinaatteljestikus sümmeetriliselt y-telje suhtes. Järelikult on iga paarisfunktsiooni graafik sümmeetriline y-telje suhtes.

Definitsioon 1.5. Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse paarituks, kui $\forall x \in X$ korral

$$f(-x) = -f(x).$$



Joonis 1.7: funktsioon $y = x^3$



Joonis 1.8: funktsioon $y = \sin x$

Paarituteks funktsioonideks on $y = x^3$, $y = \sin x$ ja $y = \tan x$. Nende funktsioonide graafikud on esitatud vastavalt joonistel 1.7, 1.8 ja 1.9.

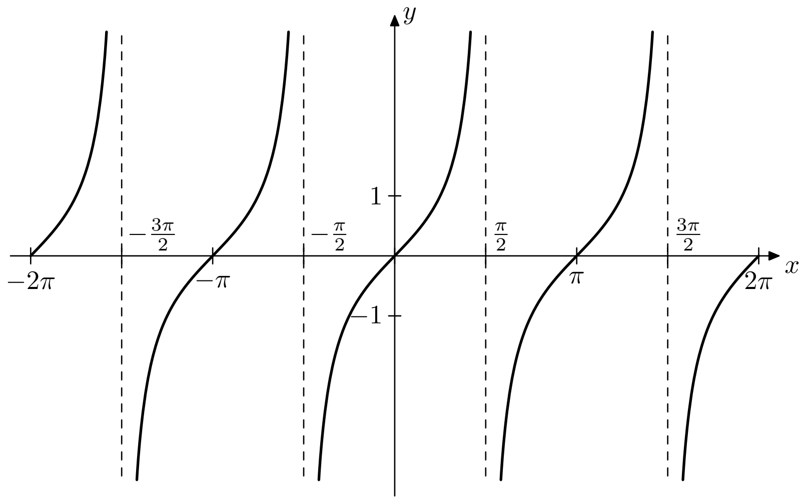
Kui mis tahes paaritu funktsiooni graafikule kuulub punkt $(x; f(x))$, siis definitsioonis esitatud tingimuse kohaselt kuulub sellele ka punkt $(-x; -f(x))$. Need kaks punkti paiknevad sümmeetriliselt koordinaatide alguspunkti suhtes. Seega on kõikide paaritute funktsioonide graafikud sümmeetrilised koordinaatide alguspunkti suhtes.

Näide 1.8. Uurime, kas funktsioon $y = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$ on paaris või paaritu.

Tähistame $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$ ja leiame $f(-x) = \ln \dfrac{1-x}{1-(-x)} = \ln \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{-1} = -\ln \dfrac{1+x}{1-x} = -f(x)$.

Saime, et $\forall x \in X$ korral $f(-x) = -f(x)$, st funktsioon on paaritu.

Kehtivad järgmised väited.



Joonis 1.9: funktsioon $y = \tan x$

- Kahe paarisfunktsiooni korrutis on paarisfunktsioon;
- kahe paaritu funktsiooni korrutis on paarisfunktsioon;
- paaris- paaritu funktsiooni korrutis on paaritu funktsioon.

Tõestame antud väidetest teise. Olgu $f(x)$ ja $g(x)$ paaritud funktsioonid. Tähistame nende korrutise $h(x) = f(x)g(x)$ ja leiame $h(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x) \cdot [-g(x)] = f(x)g(x)$, st korrutis $h(x)$ on tõepoolest paarisfunktsioon.

Näide 1.9. Vaatleme funktsiooni $y = x \ln \dfrac{1+x}{1-x}$.

Funktsioon $f(x) = x$ on paaritu, funktsioon $g(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$ on näite 4 põhjal samuti paaritu, järelikult nende korrutis, st antud funktsioon on paaris.

Definitsioon 1.6. Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse *perioodiliseks*, kui $\exists$ selline reaalarv $T \neq 0$, et $\forall x \in X$ korral

$$f(x+T) = f(x).$$

Siin on eeldatud, et ka $x + T \in X$.

Vähimat positiivset sellist reaalarvu (kui see eksisteerib) nimetatakse funktsiooni *perioodiks.*

Selle definitsiooni esimese poole põhjal on siinusfunktsioon perioodiline, sest definitsioonis nõutud reaalarvuks T sobivad 4π, 10π, -6π jne. Vähimaks positiivseks selliseks reaalarvuks on aga 2π, mis on definitsiooni põhjal siinusfunktsiooni perioodiks. Koosinusfunktsiooni perioodiks on samuti 2π, tangensfunktsiooni perioodiks on π.

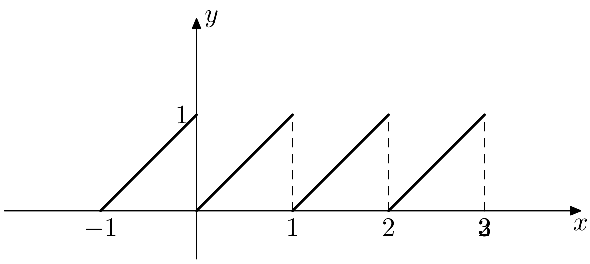
Trigonomeetrilised funktsioonid ei ole kaugeltki mitte ainsateks perioodilisteks funktsioonideks. Defineerime nn "saehamba"funktsiooni

$$f(x) = \begin{cases} x - n, & kui \quad n \leq x < n+1 \\ 0, & kui \quad x < n \ \vee \ x \geq n+1 \end{cases},$$

milles n on mis tahes täisarv.

Kui $n = 0$, siis $f(x) = x$ poolõigul $[0; 1)$ ja väljaspool seda poollõiku $f(x) = 0$. Kui $n = 1$, siis $f(x) = x - 1$ poollõigul $[1; 2)$ ja 0 väljaspool seda poollõiku. Kui $n = 2$, siis $f(x) = x - 2$ poollõigul $[2; 3)$ ja 0 väljaspool seda poollõiku. Kui $n = -1$, siis $f(x) = x + 1$ poollõigul $[-1; 0)$ ja 0 väljaspool seda poollõiku.

Funktsiooni graafik on esitatud joonisel 1.10, kusjuures funktsiooni graafikust on välja joonestatud vaadeldud n väärtuste korral tekkivad lõigud.



Joonis 1.10: "saehamba"funktsioon

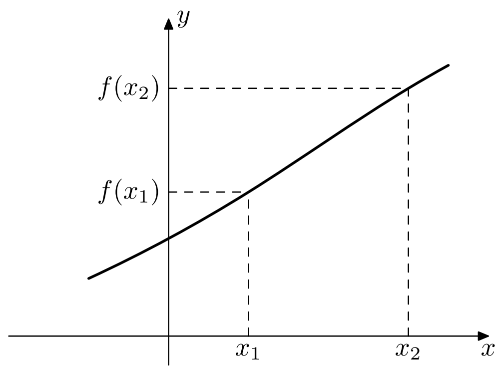
Vaadeldav funktsioonon perioodiline ja selle periood $T = 1$.

Definitsioon 1.7. Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse *kasvavaks*, kui kahe mis tahes argumendi $x_1, \ x_2 \in X$ korral, mis rahuldavad tingimust $x_1 < x_2$, on $f(x_1) < f(x_2)$.

Seega funktsiooni nimetatakse kasvavaks, kui kahest määramispiikonnast võetud argumendi väärtusest suuremale vastab suurem funktsiooni väärtus.

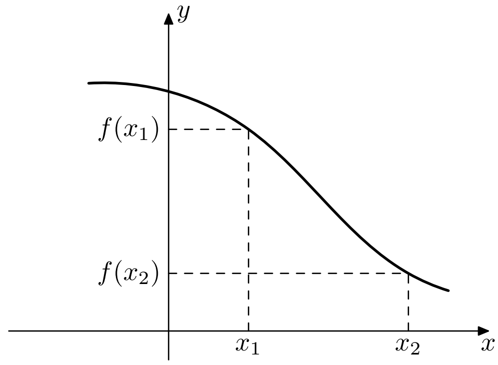
Definitsioon 1.8. Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse *monotoonselt kasvavaks*, kui kahe mis tahes argumendi $x_1, \ x_2 \in X$ korral, mis rahuldavad tingimust $x_1 < x_2$, on $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Definitsioon 1.9. Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse *kahanevaks*, kui kahe mis tahes argumendi $x_1, \ x_2 \in X$ korral, mis rahuldavad tingimust $x_1 < x_2$, on $f(x_1) > f(x_2)$.



Joonis 1.11: kasvav funktsioon

Seega funktsiooni nimetatakse kahanevaks, kui kahest määramispiikonnast võetud argumendi väärtusest suuremale vastab väiksem funktsiooni väärtus.



Joonis 1.12: kahanev funktsioon

Definitsioon 1.10. Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse *monotoonselt kahanevaks*, kui kahe mis tahes argumendi $x_1,\ x_2 \in X$ korral, mis rahuldavad tingimust $x_1 < x_2$, on $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Konstantne funktsioon on esitatud definitsioonide põhjal samaaegselt nii monotoonselt kasvav kui ka monotoonselt kahanev.

1.1.4 Pöördfunktsioon

Näites 1.1 esitatud tabel seab igale x väärtusele vastavusse y väärtuse. Täpselt samuti aga seab see tabel igale y väärtusele vastavusse x väärtuse, st muutuja y on selles tabelis vaadeldav argumendina ja muutuja x funktsioonina.

Näites 1.2 esitatud graafik seab teatud piirkonnas igale y väärtusele vastavusse ühe, kaks või kolm muutuja x väärtust. Funktsiooni laiendatud mõiste kohaselt on muutuja x vaadeldav muutuja y funktsioonina.

Näide 1.10. Analüütiline funktsioon $y = \dfrac{x}{x+1}$ seab igale x väärtusele vastavusse y väärtuse. Avaldades sellest võrdusest muutuja x saame, et $x = \dfrac{y}{1-y}$, st muutuja y väärtustele seab see võrdus vastavusse muutuja x väärtuse. Peale selle, et muutuja y on muutuja x funktsiooniks, on muutuja x vaadeldav muutuja y funktsioonina.

Järelikult on iga eeskirjaga (tabeliga, graafikuga, analüütilise avaldisega) määratud kaks funktsiooni, millest teist nimetatakse esimese *pöördfunktsiooniks.* Edaspidi hakkame funktsiooni $y = f(x)$ pöördfunktsiooni tähistama $x = \varphi(y)$.

Sellises tähistuses langevad pöördfunktsiooni ja selle pöördfunktsiooni graafikud kokku. Tavaliselt aga tähistatakse pöördfunktsioonis argument uuesti x-ga ja funktsioon y-ga ning pöördfunktsioon esitatakse $y = \varphi(x)$. Kui antud funktsiooni $y = f(x)$ graafikule kuulub punkt koordinaatidega $(x; y)$, siis pöördfunktsiooni graafikule kuulub punkt koordinaatidega $(y; x)$. Teise punkti saame esimesest, peegeldades seda koordinaattasandi I ja III veerandi nurgapoolitaja (sirge $y = x$) suhtes.

Järelikult: pöördfunktsiooni $y = \varphi(x)$ graafiku saame antud funktsiooni $y = f(x)$ graafiku peegeldamise teel sirge $y = x$ suhtes. Vaatleme näiteid.

Näide 1.11. Olgu antud funktsiooniks ruutfunktsioon $y = x^2$, mille graafik on esitatud joonisel 1.5.

Avaldades võrdusest muutuja x, saame pöördfunktsiooniks $x = \pm\sqrt{y}$ ja pärast tähistuse vahetamist $y = \pm\sqrt{x}$. Selle pöördfunktsiooni graafikuks on funktsiooni $y = x^2$ graafiku peegeldus sirge $y = x$ suhtes (joonis 1.13).

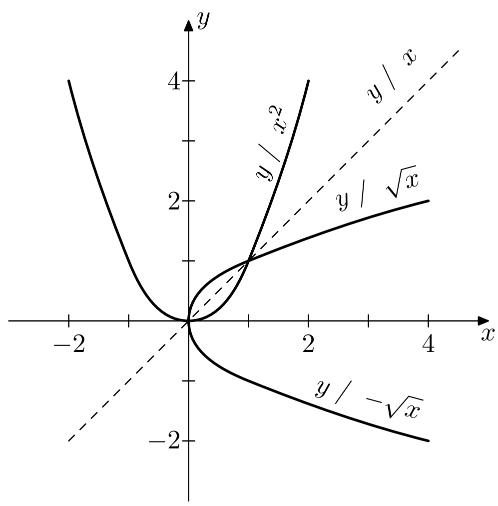
Näide 1.12. Olgu antud funktsiooniks eksponentfunktsioon $y = 2^x$. Siit muutuja $x = \log_2 y$ ja pärast tähistuse vahetamist $y = \log_2 x$. Eksponentfunktsiooni pöördfunktsiooniks on logaritmfunktsioon.

Eraldame siinusfunktsioonist $y = \sin x$ osa, mille määramispiirkond on $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ (joonis 1.15).

Antud juhul vastab igale muutuja $y \in [-1; 1]$ väärtusele üks muutuja x väärtus. Seda pöördfunktsiooni tähistatakse $x = \arcsin y$. Pärast tähistuse muutmist saame funktsiooni $y = \sin x$, $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ pöördfunktsiooni $y = \arcsin x$. Selle funktsiooni määramispiirkond on $X = [-1; 1]$ ja muutumispiirkond $Y = \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Avaldades võrdusest $y = \sin x$ muutuja x, saame $\forall\ y \in [-1; 1]$ korral $x = (-1)^n \arcsin y + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$. Vahetades tähistuse, saame lõpmatult mitmese funktsiooni $y = (-1)^n \arcsin x + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$, mida tähistatakse $y = \operatorname{Arcsin} x$

Eraldame koosinusfunktsioonist osa, mille määramispiirkond on $[0; \pi]$ (joo-



Joonis 1.13: funktsioon $y = x^2$ ja selle pöördfunktsioon

nis 1.18).

Igale $y \in [-1; 1]$ väärtusele vastab üks muutuja x väärtus. Seda funtksiooni tähistatakse $x = \arccos y$. Pärast tähistuse vahetamist saame funktsiooni $y = \arccos x$, mille määramispiirkond $X = [-1; 1]$ ja muutumispiirkond $Y = [0; \pi]$.

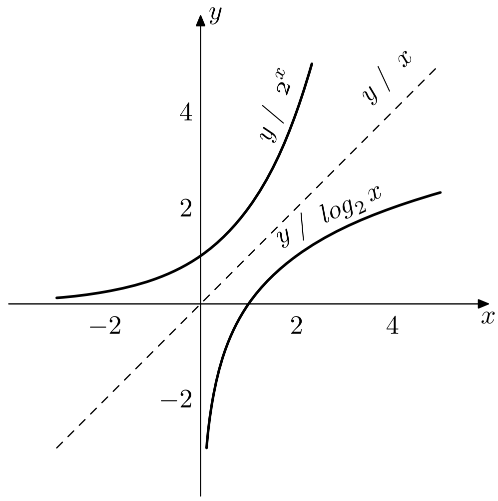
Funktsioonide $y = \arcsin x$ ja $y = \arccos x$ vahel kehtib $\forall x \in [-1; 1]$ puhul seos

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

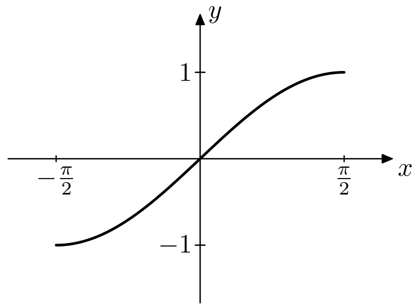
Avaldades võrdusest $y = \cos x$ muutuja x, saame $x = \pm \arccos y + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$. Pärast tähistuse vahetamist saadud lõpmatult mitmest funktsiooni $y = \pm \arccos x + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$ tähistatakse $y = \operatorname{Arccos} x$.

Eraldame tangensfunktsioonist osa, mille määramispiirkond on vahemik $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Selle funktsiooni graafikuks on koordinaatide alguspunkti läbiv tangensfunksiooni haru (joonis 1.9). Sellise funktsiooni puhul vastab igale $y \in (-\infty; \infty)$ väärtusele parajasti üks muutuja x väärtus vahemikust $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ ja seda tähistatakse $x = \arctan y$. Pärast tähistuse vahetamist saame $y = \tan x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, pöördfunktsiooni $y = \arctan x$. Selle määramispiirkond $X = (-\infty; \infty)$ ja muutumispiirkond $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Avaldades võrrandist $y = \tan x$ muutuja x, saame $x = \arctan y + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$. Vahetades tähistuse, saame funktsiooni $y = \tan x$ lõpmatult mitmese pöördfunktsiooni $y = \arctan x + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$, mida tähistataskse $y = \operatorname{Arctan} x$.



Joonis 1.14: funktsioon $y = 2^x$ ja selle pöördfunktsioon $y = \log_2 x$



Joonis 1.15: funktsioon $y = \sin x$ lõigul $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

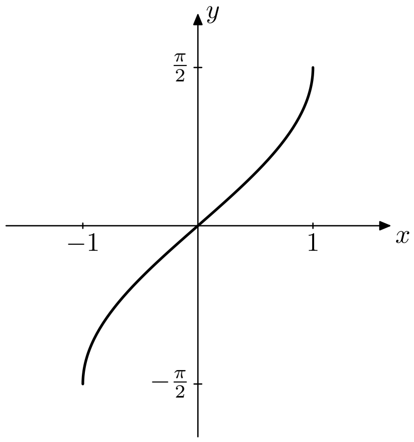
Lisame juba vaadeldud trigonomeetrilistele funtksioonidele veel neljanda $y = \cot x$. Graafik on esitataud joonisel 1.22

Eraldame funktsioonist $y = \cot x$ välja haru määramispiirkonnaga $(0; \pi)$. Sellel harul vastab igale $y \in (-\infty; \infty)$ väärtusele üks muutuja x väärtus. Seda funtksiooni tähistatakse $x = \operatorname{arccot} y$. Pärast tähistuse muutmist on funktsiooni $y = \cot x$, $x \in (0; \pi)$ pöördfunktsiooniks $y = \operatorname{arccot} x$. Selle funktsiooni määramispiirkond $X = (-\infty; \infty)$ ja muutumispiirkond $Y = (0; \pi)$.

Funktsioonide $y = \arctan x$ ja $y = \operatorname{arccot} x$ vahel kehtib $\forall x \in (-\infty; \infty)$ korral seos

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}.$$

Avaldades võrrandist $y = \cot x$ muutuja x, saame $x = \operatorname{arccot} y + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$. Vahetades tähistuse, saame funktsiooni $y = \cot x$ lõpmatult mitmese



Joonis 1.16: funktsioon $y = \arcsin x$

pöördfunktsiooni $y = \operatorname{arccot} x + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$, mida tähistatakske $y = \operatorname{Arccot} x$.

1.1.5 Hüperboolsed funktsioonid ja nende pöördfunktsioonid

Peale vaadeldud põhiliste elementaarfunktsioonide vaadeldakse matemaatilises analüüsis veel nn *hüperboolseid funktsioone* ja nende pöördfunktsioone, nn *areafunktsioone*. Hüperboolsed funktsioonid ja areafunktsioonid avalduvad juba vaadeldud põhiliste elementaarfunktsioonide kaudu.

Hüperboolseteks funktsioonideks on *hüperboolne siinus, hüperboolne koosinus, hüperboolne tangens ja hüperboolne kootangens.*

Hüperboolne siinus $y = \operatorname{sh} x$ on defineeritud kui

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Hüperboolse siinuse graafik on esitatud joonisel 1.24. Funktsiooni määramispiirkond $X = (-\infty; \infty)$ ja muutumispiirkond $Y = (-\infty; \infty)$.

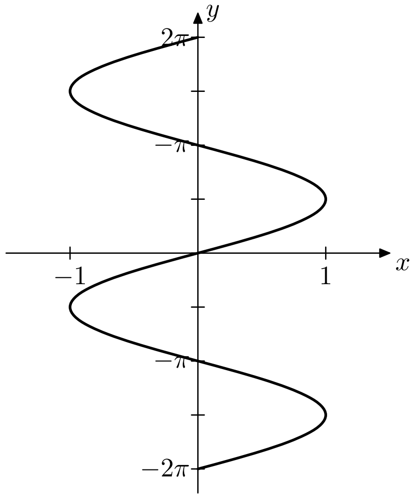
Hüperboolne koosinus $y = \operatorname{ch} x$ on defineeritud kui

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

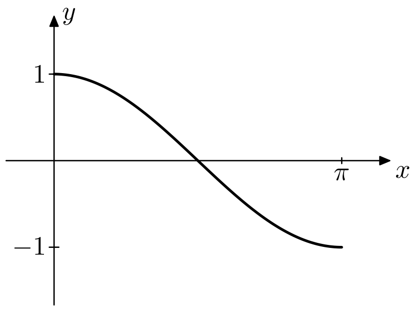
Hüperboolse koosinuse graafik on joonisel 1.25. Selle funktsiooni määramispiirkond $X = (-\infty; \infty)$ ja nmuutumispiirkmond $Y = [1; \infty)$.

Hüperboolse siinuse ja koosinuse jaoks kehtib rida analoogilisi seoseid, mis on tuttavad trigonomeetriliste siinuse ja koosinuse korral.

- $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;$



Joonis 1.17: funktsioon $y = \operatorname{Arcsin} x$



Joonis 1.18: funktsioon $y = \cos x$ lõigul $[0; \pi]$

- $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$;
- $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$.

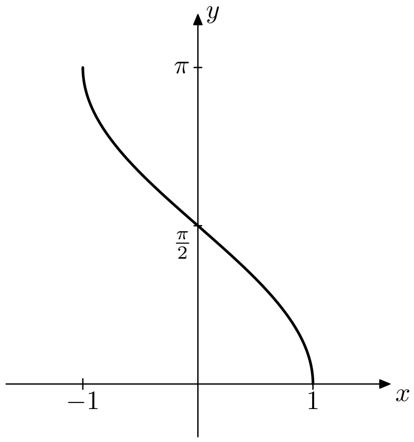
Hüperboolne tangens $y = \operatorname{th} x$ on defineeritud kui

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Hüperboolse tangensi graafik on joonisel 1.26. Selle funktsiooni määramispiirkond on $X = (-\infty; \infty)$ ja muutumispiirkond $Y = (-1; 1)$.

Hüperboolne kootangens $y = \operatorname{cth} x$ on defineeritud kui

$$\operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x} = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$



Joonis 1.19: funktsioon $y = \arccos x$

Hüperboolse kootangensi graafik on joonisel 1.27. Selle funktsiooni määramispiirkond on $X = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ ja muutumispiirkond $Y = (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$.

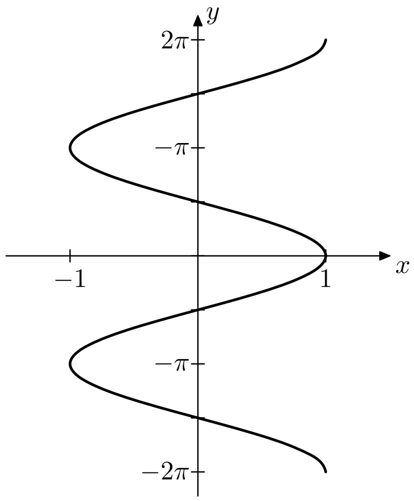
Leiame funktsiooni $y = \operatorname{sh} x$ pöördfunktsiooni. Selleks avaldame võrrandist $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ muutuja x. Korrutades võrrandi mõlemad pooled suurusega $2e^x$ saame $e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$, st ruutvõrrandi e^x suhtes, millest

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}.$$

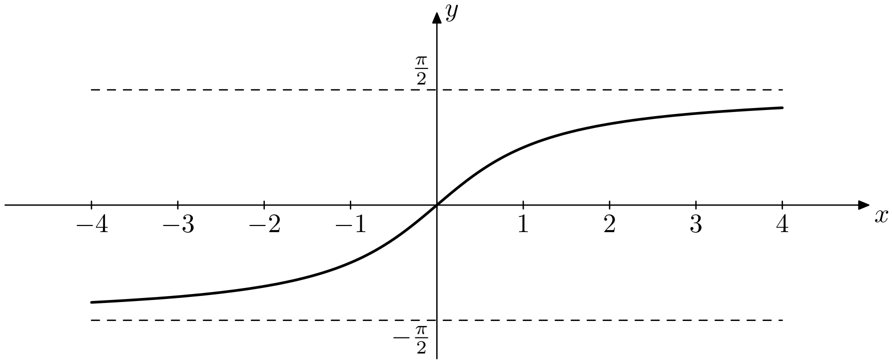
Miinusmärk juure ees ei ole võimalik, sest $y - \sqrt{y^2 + 1}$ on negatiivne, aga e^x negatiivne ei saa olla. Avaldame viimasest võrdusest $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$. Vahetades tähistuse, saame funktsiooni $y = \operatorname{sh} x$ pöördfunktsiooniks $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Seda funktsiooni nimetatakse areasiinuseks ja tähistatakse $y = \operatorname{arsh} x$.

Avaldades samal viisil võrrandist $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ muutuja x, saame $x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$. Vahetades tähistuse saame, et funktsiooni $y = \operatorname{ch} x$ pöördfunktsiooniks on $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, mida nimetatakse areakoosinuseks ja tähistatakse $y = \operatorname{arch} x$.

Avaldame võrrandist $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ muutuja x. Tulemuseks on $x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 + y}{1 - y}$. Pärast tähistuse vahetamist saame funktsiooni $y = \operatorname{th} x$ pöördfunktsiooniks $y = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 + x}{1 - x}$, mida nimetatakse areatangensiks ja tähistatakse $y = \operatorname{arth} x$.



Joonis 1.20: funktsioon $y = \operatorname{Arccos} x$



Joonis 1.21: funktsioon $y = \arctan x$

1.1.6 Liitfunktsioon

Oletame, et argumendile $x \in X$ on vastavusse seatud muutuja u väärtus,

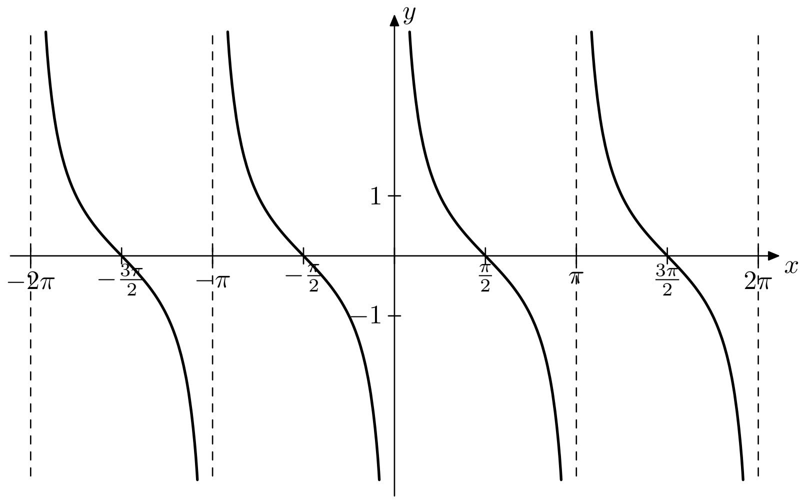
$$u = g(x),$$

st u on muutuja x funktsioon ja omandab väärtusi hulgast U. Muutuja $u \in U$ võib omakorda olla argumendiks mingile teisele funktsioonile

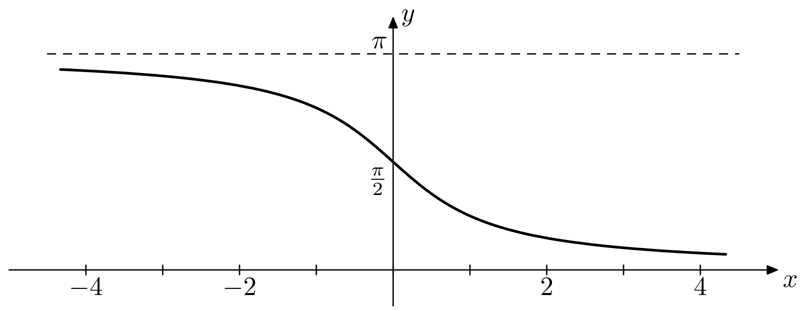
$$y = f(u).$$

Kui asendada u muutuja x kaudu viimasesse funktsiooni, saame *liitfunktsiooni*

$$y = f[g(x)].$$



Joonis 1.22: funktsioon $y = \cot x$



Joonis 1.23: funktsioon $y = \operatorname{arccot} x$

Funktsioone $u = g(x)$ ja $y = f(u)$ nimetatakse liitfunktsiooni *komponent-funktsioonideks* ehk *komponentideks*. Seejuures funktsiooni $u = g(x)$ nimetatakse *seesmiseks* ja funktsiooni $y = f(u)$ *väliseks*.

Näide 1. Liitfunktsiooni $y = \sqrt{1 - x^2}$ komponendid on seesmine funktsioon

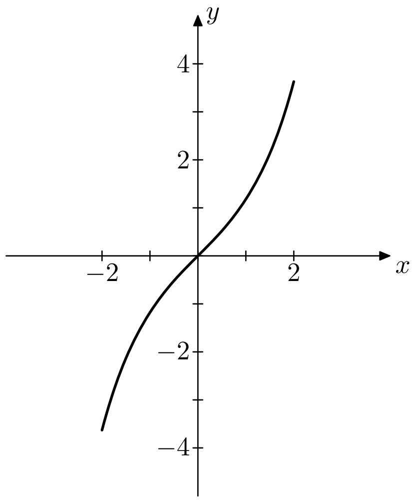
$$u = 1 - x^2$$

ja väline funktsioon

$$y = \sqrt{u}.$$

Näide 2. Kui koostada komponentidest $u = \dfrac{1+x}{1-x}$ ja $y = \dfrac{1}{2}\ln u$ liitfunktsioon, saame

$$y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},$$



Joonis 1.24: hüperboolne siinus $y = \operatorname{sh} x$

st funktsiooni

$$y = \operatorname{arth} x.$$

On olemas liitfunktsioone, millel on komponente rohkem kui kaks. Kui u on x funktsioon,

$$u = h(x),$$

muutuja v on u funktsioon

$$v = g(u)$$

ja muutuja y on v funktsioon

$$t = f(v),$$

saame liitfunktsiooni

$$y = f\{g[h(x)]\}.$$

Analoogilisel viisil saab defineerida nelja, viie ja enam komponendiga liitfunktsioonid.

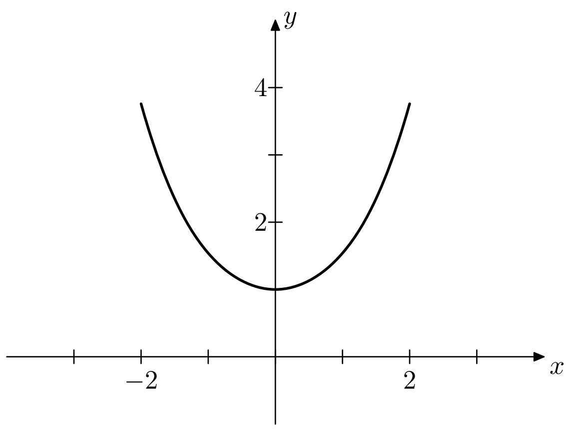
Näide 3. Koostame komponentidest $u = \cos x$, $v = \log u$ ja $y = \sqrt{v}$ liitfunktsiooni ja leiame selle määramispiirkonna.

Asendades teise funktsiooni u, ssame $v = \log\cos x$ ja asendades selle omakorda kolmandasse, saame

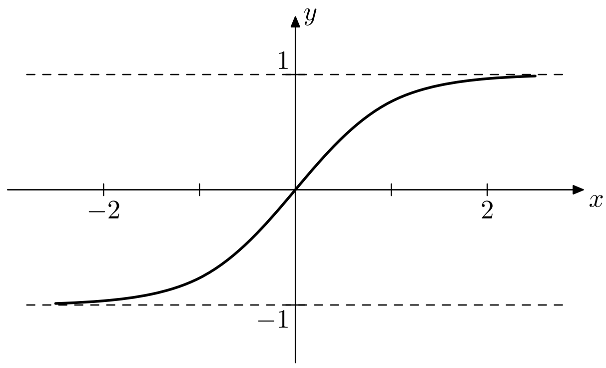
$$y = \sqrt{\log\cos x}.$$

Määramispiirkonna leidmiseks kirjutame tingimuse

$$\log\cos x \geq 0$$



Joonis 1.25: hüperboolne koosinus $y = \operatorname{ch} x$

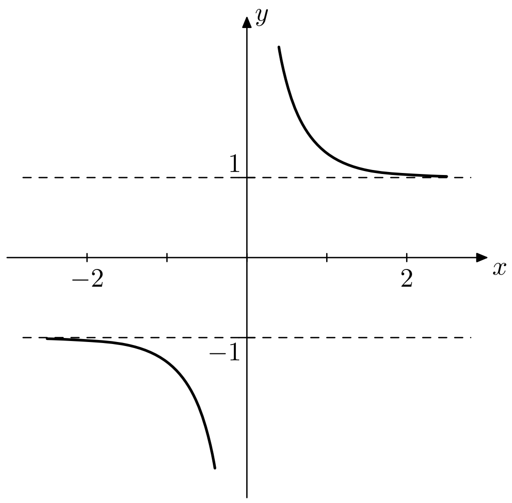


Joonis 1.26: hüperboolne tangens $y = \operatorname{th} x$

ehk

$$\cos x \geq 1.$$

Viimane tingimus on võimalik ainult juhul, kui $\cos x = 1$, millest $x = 0,\ \pm 2\pi,\ \pm 4\pi,\ \ldots$, st määramispiirkond koosneb üksikutest punktidest $X = \{x | x = 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$



Joonis 1.27: hüperboolne kootangens $y = \operatorname{cth} x$