Funktsioonide lähendamine

Funktsiooni lähendamine ehk **interpoleerimine** on funktsiooni jätkamine.
Olgu antud lõigul $[a, b]$ $n + 1$ punkti $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Selliseid punkte nimetatakse interpolatsioonisõlmedeks. Olgu samas teada ka funktsiooni $f(x)$ väärtused neis sõlmedes $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Kui funktsiooni $f(x)$ väärtused väljaspool sõlmi pole teada, saabki rääkida interpolatsiooniülesandest: leida mingi funktsioon $\Phi(x)$ nii, et kehtiks tingimused

$$\Phi(x_j) = f(x_j), \ \ j = 0, 1, \ldots, n.$$

Leidub parajasti üks ülimalt $n-$astme polünoom

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^{n} L_{n,i}(x) f(x_i),$$

mis rahuldab interpolatsioonitingimusi ja kus

$$L_{n,i}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}.$$

Sellist polünoomi nimetatakse **Lagrange'i interpolatsioonipolünoomiks.**

Ühtlase võrgu korral kehtib Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi jaoks hinnang

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq |f^{(n+1)}(x)|h^{n+1},$$

kus $h = x_j - x_{j-1}$ on võrgu samm.
Polünoomi

$$\Phi(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) +$$

$$+ \ldots + f(x_0, x_1, \ldots, x_n)(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

nimetatakse **Newtoni interpolatsioonipolünoomiks**.
$n + 1$ sõlme jaoks saab leida ainult ühe $n-$astme polünoomi, seega langevad Lagrange' ja Newtoni polünoom kokku, st esitavad üht ja sama polünoomi.

Tükiti polünomiaalne interpolatsioon

Täpsema interpoleerimise jaoks võib konstrueerida interpolandi, mille sõlmede arv ei lähene lõpmatusele ($n \to \infty$), kuid seda interpolanti saab kasutada osalõikudel, mille arv läheneb lõpmatusele. Selleks tuleb vaadeldav lõik $[a, b]$ jaotada k osalõiguks punktidega

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$$

ning igal osalõigul $[x_i, x_{i+1}]$ valime sõlmed

$$x_i = y_{i,0} < y_{i,1} < \ldots < y_{i,l} = x_{i+1}.$$

Olgu sõlmedes $y_{i,j}$ antud funktsiooni väärtused $f(y_{i,j})$. Igal osalõigul vaadeldakse $l-$astme interpolanti, mis rahuldab interpolatsioonitingimusi $\Phi(y_{i,j}) = f(y_{i,j})$.
Nii saame tükiti polünomiaalse funktsiooni $\Phi(x)$ liitekohtadega punktides x_i. Etteantud interpolatsioonitingimuste tõttu on interpolant sõlmedes x_i pidev.

Võrgu tihendamisel $k \to \infty$, ent l jääb samaks. Sellisel juhul

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq Ch^{l+1} \to 0, \text{ kui } x_j - x_{j-1} \to 0.$$

Tükiti lineaarne interpolatsioon on lähendamine lineaarse funktsiooniga.
Ruutinterpolatsioon on lähendamine ruutfunktsiooniga.

Splainid

Olgu lõik $[a, b]$ jagatud osalõikudeks punktidega

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b.$$

l-järku splainiks siledusastmega p nimetatakse järgmiste omadustega funktsiooni $S^{l,p}(x)$:
1. $S^{l,p}(x)$ on ülimalt l-astme polünoom igal osalõigul $[x_i; x_{i+1}]$;
2. $S^{l,p}(x)$ ise ja tema tuletised kuni järguni p (kaasa arvatud) on pidevad vahemikus $(a; b)$.

Rakendustes kasutatakse tavaliselt kuupsplaine siledusastmega 2, mida tähistatakse $S^{3,2}(x)$.
Kõige lihtsam on splaine esitada baasisplainide ehk B-splainide abil.

Lineaarsplainid $S^{1,0}(x)$.

$$S^{1,0}(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i B_i^{1,0}(x),$$

kus $c_0, c_1, \ldots, c_k$ on kordajad ja

$$B_i^{1,0}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & \text{kui} \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, & \text{kui} \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \text{mujal} \end{cases}$$

Ühtlase võrgu korral

$$B_i^{1,0}(x) = B^{1,0}\left(\frac{x - x_i}{h}\right),$$

kua $B^{1,0}(x)$ on splain, mis $[-1; 1]$ erineb nullist, st

$$B^{1,0}(x) = \begin{cases} 1 + x, & \text{kui } x \in [-1; 0] \\ 1 - x, & \text{kui } x \in [0; 1] \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Kuupsplainid $S^{3,2}(x)$.
Minimaalse pikkusega lõik, kus annab baasisplaini konstrueerida, on $[x_{i-2}; x_{i+2}]$. Baasisplain $B^{3,2}(x)$ on kujul

$$B^{3,2}(x) = \begin{cases} (x+2)^3, & \text{kui } x \in [-2;-1] \\ 1 + 3(x+1) + 3(x+1)^2 - 3(x+1)^3, & \text{kui } x \in [-1;0] \\ 1 + 3(1-x) + 3(1-x)^2 - 3(1-x)^3, & \text{kui } x \in [0;1] \\ (2-x)^3, & \text{kui } x \in [1;2] \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Suvalise kuupsplaini saame esitada *B*-splainide lineaarkombinatsioonina

$$S^{3,2}(x) = \sum_{i=-1}^{k+1} c_i B_i^{3,2}(x).$$

Funktsioonide lähendamine vähimruutude meetodil

Diskreetne juht

Olgu antud $[a, b]$ nii, et $a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b$ ja sõlmedes on teada $f(x_j)$, kus $j = 0, 1, \ldots, n$. Otsime funktsiooni $\Phi(x)$, mis antud sõlmedes lähendaks funktsiooni $f(x)$. Kui interpolatsiooniülesanne on üle määratud, siis ei saa lahendada interpolatsiooniülesannet selle klassikalises mõistes.

Lahenduseks oleks leida selline funktsioon $\Phi(x)$, mis sõlmedes langeb kõige paremini kokku funktsiooni $f(x)$ väärtustega. Kahe funktsiooni erinevuste mõõtmiseks kasutame funktsiooni

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i \left(\Phi(x_i) - f(x_i)\right)^2 ,$$

kus $\kappa_i > 0$ on kaalud, mis võimaldavad varieerida funktsioonide $f(x)$ ja $\Phi(x)$ kokkulangevust.

Suurust $J(\Phi)$ nimetatakse **vähimruutude funktsionaaliks.**

Nii püstitatud ülesannet nimetatakse **vähimruutude ülesandeks.**
Kui $J(\Phi) = 0$, siis on funktsionaali miinimum ka interpoleerimisülesande lahendiks.
Sellise minimeerimisülesande lahendiks sobib funktsioon

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \phi_j(x),$$

kus $c_1, c_2, \ldots, c_m$ on konstandid, $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_m(x)$ on etteantud klassi funktsioonid.
Seega

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i \left(\sum_{j=1}^{m} c_j \phi_j(x_i) - f(x_i) \right)^2 .$$

Siin tundmatuteks $c_1, c_2, \ldots, c_m$, võime tähistada $J(\Phi) = J(c_1, c_2, \ldots, c_m)$.

Funktsiooni $J(c_1, c_2, \dots, c_m)$ miinimumi tarvilik tingimus on

$$\frac{\partial}{\partial c_k} J(c_1, c_2, \dots, c_m) = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Kordajad $c_1, c_2, \dots, c_m$ saab määrata $m \times m$ lineaarsest võrrandisüsteemist

$$\sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{i=0}^{n} \kappa_i \phi_j(x_i) \phi_k(x_i) \right] c_j = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i f(x_i) \phi_k(x_i), \quad k = 1, \dots, m.$$

Lineaarne juht

Kui $\Phi(x) = c_1 x + c_2$, siis on vaja määrata kordajad c_1 ja c_2.

$$J(\Phi) = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i \left(c_1 x_i + c_2 - f(x_i)\right)^2$$

ja

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial c_1} = 2 \sum_{i=0}^{n} \kappa_i \left(c_1 x_i + c_2 - f(x_i)\right) \cdot x_i = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial c_2} = 2 \sum_{i=0}^{n} \kappa_i \left(c_1 x_i + c_2 - f(x_i)\right) \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 \sum\limits_{i=0}^{n} \kappa_i \cdot x_i^2 + c_2 \sum\limits_{i=0}^{n} \kappa_i \cdot x_i = \sum\limits_{i=0}^{n} \kappa_i \cdot f(x_i) \cdot x_i \\ c_1 \sum\limits_{i=0}^{n} \kappa_i \cdot x_i + c_2 \sum\limits_{i=0}^{n} \kappa_i = \sum\limits_{i=0}^{n} \kappa_i \cdot f(x_i) \end{cases}$$

Analoogiliselt saab leida kordajad c_1, c_2, c_3 ruutfunktsioonile $\Phi = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$. Siis oleks vaja lahendada lineaarne võrrandisüsteem

$$\begin{cases} c_1 \sum_{i=0}^{n} \kappa_i \cdot x_i^4 + c_2 \sum_{i=0}^{n} \kappa_i \cdot x_i^3 + c_3 \sum_{i=0}^{n} \kappa_i \cdot x_i^2 = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i \cdot f(x_i) \cdot x_i^2 \\ c_1 \sum_{i=0}^{n} \kappa_i \cdot x_i^3 + c_2 \sum_{i=0}^{n} \kappa_i \cdot x_i^2 + c_3 \sum_{i=0}^{n} \kappa_i \cdot x_i = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i \cdot f(x_i) \cdot x_i \\ c_1 \sum_{i=0}^{n} \kappa_i \cdot x_i^2 + c_2 \sum_{i=0}^{n} \kappa_i \cdot x_i + c_3 \sum_{i=0}^{n} \kappa_i = \sum_{i=0}^{n} \kappa_i \cdot f(x_i) \end{cases}$$

Näide Antud on

x	-4	-3	-2	0	2	3	4
y	0,32	-0,27	-0,55	-0,48	0,28	1,12	1,87

Lähendame esitatud funktsiooni ruutfunktsiooniga
$\Phi(x) = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$, kasutame kaalusid $\kappa_i = 1$, $i = 1, \ldots, 7$.
Arvutame vajalikud summad:
$\sum x_i = 0$, $\sum x_i^2 = 58$, $\sum x_i^3 = 0$, $\sum x_i^4 = 706$
$\sum y_i = 2,29$, $\sum x_i y_i = 12,03$, $\sum x_i^2 y_i = 41,61$.

Seega süsteem tuleb kujule

$$\begin{cases} 706c_1 + 58c_3 = 41,61 \\ 58c_2 = 12,03 \\ 58c_1 + 7c_3 = 2,29 \end{cases}$$

Siit $c_3 = -0,5048$, $c_2 = 0,2074$ ja $c_1 = 0,1004$. Ruutfunktsiooniks tuleb seega

$$\Phi(x) = 0,1004x^2 + 0,2074x - 0,5048.$$

Pidev juht

Olgu funktsioon $f(x)$ määratud kogu lõigul $[a,b]$. Ülesandeks on leida selline $\Phi(x)$, mis langeks kõige paremini kokku funktsiooniga $f(x)$ tervel lõigul $[a,b]$. Funktsioonide $\Phi(x)$ ja $f(x)$ erinevuse mõõduks tervel lõigul $[a,b]$ võib võtta funktsionaali

$$J(\Phi) = \int_a^b \kappa(x)(\Phi(x) - f(x))^2 dx,$$

kus $\kappa(x)$ on kaalufunktsioon.

Ka pideval juhul võib otsida $\Phi(x)$ kujul $\Phi(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j\phi_j(x)$, kus $\phi_(x)$ on etteantud funktsioonid ning c_j tundmatud kordajad ($j = 1, 2, \dots, m$). Siis

$$J(\Phi) = \int_a^b \kappa(x)(\sum_{j=1}^{m} \left(c_j\phi_j(x) - f(x)\right)^2 dx.$$

Miinimumi jaoks $\dfrac{\partial J}{\partial c_k} = 0$, iga $k = 1, 2, \ldots, m$.

$$\frac{\partial J}{\partial c_k} = \frac{\partial}{\partial c_k} \int_a^b \kappa(x) \left(\sum_{j=1}^{m} c_j \phi_j(x) - f(x) \right)^2 dx =$$

$$= 2 \int_a^b \kappa(x) \left(\sum_{j=1}^{m} c_j \phi_j(x) - f(x) \right) \frac{\partial}{\partial c_k} \left(\sum_{j=1}^{m} c_j \phi_j(x) - f(x) \right) dx =$$

$$= 2 \int_a^b \kappa(x) \left(\sum_{j=1}^{m} c_j \phi_j(x) - f(x) \right) \phi_k(x) dx =$$

$$= 2 \sum_{j=1}^{m} \left(\int_a^b \kappa(x) \phi_j(x) \phi_k(x) dx \right) c_j - 2 \int_a^b \kappa(x) f(x) \phi_k(x) dx.$$

Kordajate $c_1, c_2, \ldots, c_m$ määramiseks tekib lineaarne võrrandisüsteem

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\int_a^b \kappa(x)\phi_j(x)\phi_k(x)dx \right) c_j = \int_a^b \kappa(x) f(x) \phi_k(x) dx,$$

$k = 1, 2, \ldots, m.$