

Kodused ülesanded

1. Näidata, et $y = \frac{\sin x}{x}$ on diferentsiaalvõrrandi $xy' + y = \cos x$ lahendiks.
2. Lahendada diferentsiaalvõrrand $xdy + ydx = 0$.
3. $x(y^2 + 1)dx + y(x^2 + 1)dy = 0$.
4. $x^2y' = (x - 1)y$.
5. $y' = \frac{y-1}{x+1}$.
6. $xy' = x \sin \frac{y}{x} + y$
7. $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$
8. $xdy + (x^2 - y)dx = 0$
9. $\frac{2x}{y^3}dx + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\right)dy = 0$
10. $(x^4 \ln x - 2xy^3)dx + 3x^2y^2dy = 0$
11. $xy'(xy' + y) = 2y^2$
12. $(y')^3 = x - y'$
13. $y^{(4)} = \cos x$
14. $x = y'' + (y'')^4$
15. $y'' - y' = x$
16. $y^3y'' = 1$
17. $xyy'' - x(y')^2 = yy'$
18. Leida funktsioonide $y_1 = x$ ja $y_2 = \ln x$ Wronski determinant. Määrata, kas funktsioonid on lineaarselt sõltuvad või sõltumatud.
19. $(x^2 + 1)y'' + xy' - y = 0$
20. $y'' + \frac{2}{x}y' + y = \frac{1}{x}$ $y_1 = \frac{\sin x}{x}$
21. $y'' + y = \frac{x^2+2}{x^3}$ (mittehom. DV üks lahend leida Lagrange'i meetodiga).
22. $y'' + 4y' + 3y = x$ (mittehom DV. üks lahend leida määramata kordajate meetodil)
23. Lahendada Cauchy ülesanne:

$$y'' + y = 4e^x$$

Algtingimused

$$y(0) = 4$$

$$y'(0) = -3.$$

Vastused:

1. On lahend.
2. $xy = C$.
3. $y^2 + 1 = \frac{C}{x^2+1}$.
4. $y = Cxe^{\frac{1}{x}}$.
5. $y = 1 + C(x + 1)$.
6. $\tan \frac{y}{2x} = Cx$; $\frac{y}{x} = k\pi$, $x \neq 0$ (NB! $\int \frac{du}{\sin u} = \ln |\tan \frac{u}{2}| + C$)

7. $y^2 = \frac{x^2}{\ln x - C}; \quad y = 0, \quad x \neq 0$

8. $y = Cx - x^2$

9. $u(x, y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y}$

10. $u(x, y) = x \ln x - x + \frac{y^3}{x^2}, \quad x = 0$

11. $y = Cx, \quad x^2 y = C$

12. $\begin{cases} x = p^3 + p \\ 4y = 3p^4 + 2p^2 + C \end{cases}$

13. $y = \cos x + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4$

14. $\begin{cases} x = p + p^4 \\ 45y = 16p^9 + 21p^6 + \frac{45}{6}p^3 + C_1(p + p^4) + C_2 \end{cases}$

15. $y = C_1 e^x - \frac{x^2}{2} - x + C_2$

16. $C_1 y^2 - 1 = (C_1 x + C_2)^2$

17. $y = C_2 e^{C_1 x^2}$

18. $W(x) = 1 - \ln x$, funktsioonid on linearselt sõltuvad.

19. $y = C_2 x - C_1 \sqrt{x^2 + 1}$

NB! $\int \frac{x dx}{x^2 + a} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a), \quad \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a^2 x}$

20. $y = C_2 \frac{\sin x}{x} - C_1 \frac{\cos x}{x} + \frac{1}{x}$

NB! $\int \cot x dx = \ln \sin x, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x$

21. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{x}$

NB! $\int \frac{\sin ax}{x^2} dx = -\frac{\sin ax}{x} + a \int \frac{\cos ax}{x} dx, \quad \int \frac{\sin ax}{x^n} dx = -\frac{\sin ax}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \int \frac{\cos ax}{x^{n-1}} dx$

$\int \frac{\cos ax}{x^2} dx = -\frac{\cos ax}{x} - a \int \frac{\sin ax}{x} dx, \quad \int \frac{\cos ax}{x^n} dx = -\frac{\cos ax}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a}{n-1} \int \frac{\sin ax}{x^{n-1}} dx$

22. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + \frac{3x-4}{9}$

23. $y = 2 \cos x - 5 \sin x + 2e^x$