

Mittelineaarsete võrrandite ja süsteemide lahendamine

Võrrandi $f(x) = 0$ lahendamiseks saab kasutada käske `fzero` ja `fsolve`. Neil on sarnane kuju:

```
fzero(f,alglahend)
fsolve(f,alglahend)
```

Nende kahe käsu vahe on selles, et `fsolve` on võimsam ja sellega on võimalik lahendada ka mittelineaarseid süsteeme. Käsk `fzero` on olemas Matlabi põhipaketis. Käsk `fsolve` puudub Matlabi põhipaketist, kuid sisaldub Optimization toolbox-is, mis tuleks soovi korral põhipaketile juurde osta. Tasuta tarkvaras Octave on olemas mõlemad käsud `fzero` ja `fsolve`.

Käskudes sisalduv alglahend tuleb valida otsitava lahendi lähedalt. Selleks sobib kasutada graafikut. Kui lahendeid on ainult üks, ei ole alglahendi valik oluline. Matlab-Octave leiab ise sobiva iteratsioonimeetodi vaadeldava võrrandi lahendamiseks.

NÄITEÜLESANNE 1. Lahendada võrrand $te^t = 5$ alglahendiga 0.

Lahendus. Kirjutame võrrandi ümber järgmiselt: $te^t - 5 = 0$. Seega tuleb lahendada võrrand $f(t) = 0$, kus $f(t) = te^t - 5$. Koostame järgmise skripti:

```
%Defineerime funktsiooni f
f=@(t)t*exp(t)-5;
%Lahendame võrrandi f(t)=0
fzero(f,0)
```

Loomulikult võib viimasel real `fzero` asemel olla ka `fsolve`. Salvestame ja käivitame skripti. Kuvatakse vastus `ans=1.3267`

Funktsiooni tähis `f` ei ole kohustuslik. Viimase ülesande võime lahendada ka mingit muud funktsiooni tähist kasutades. Näiteks kui me tähistaksime funktsiooni $te^t - 5$ sümboliga `z1`, oleks skript järgmine:

```
%Defineerime funktsiooni z1
z1=@(t)t*exp(t)-5;
%Lahendame võrrandi z1(t)=0
fzero(z1,0)
```

NÄITEÜLESANNE 2. Leida võrrandi $x^3 - 6x^2 + 3 \arctan x + 3 = 0$ kõik lahendid.

Lahendus. Alustame sellest, et teeme kindlaks kui palju on lahendeid ja leiame iga lahendi lähedalt mingi arvu, mis sobib alglahendiks. Selle jaoks võib kasutada mitmeid meetodeid. Valime graafilise meetodi. Seega tuleb joonestada funktsiooni $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3 \arctan x + 3$ graafik. Kasutame käsku `fplot`. Vastav skript võiks olla järgmine:

```
fplot('x^3-6*x^2+3*atan(x)+3',[a,b])
grid on
```

kus lõigu otspunktid `a` ja `b` tuleks valida nii, et kõik lahendid oleks näha. Eri-
nevaid `a` ja `b` väärtusi varieerides jõuame järeldusele, et võrrandil on 3 lahendit. Konkreetselt olgu siinkohal toodud [graafik](#) lõigul $[-2, 7]$, st $a = -2$ ja $b = 7$ korral. Graafikult näeme, et funktsioon läbib horisontaalset nulljoont punktide $x = -0.5$, $x = 1$ ja $x = 5.5$ lähedalt. Lahendamegi võrrandit nende kolme erineva alglahendiga. Vastav skript (koos eelneva graafiku joonestamisega) oleks järgmine:

```
%Funktsiooni graafiku joonestamine
fplot('x^3-6*x^2+3*atan(x)+3',[-2,7])
```

```

grid on
%Funktsiooni defineerimine käsu fzero jaoks
f=@(x)x^3-6*x^2+3*atan(x)+3;
%Võrrandi lahendamine kolme erineva alglähendiga
lahend1=fzero(f,-0.5)
lahend2=fzero(f,1)
lahend3=fzero(f,5.5)
Matlab-Octave annab järgmised vastused: lahend1= -0.4983 lahend2=1.0464 lahend3=5.7849

```

Käsitleme ka mittelineaarsete süsteemide lahendamist. Olgu vaadeldav süsteem antud kujul $F(x) = 0$, kus F on vektorfunktsioon ja x on otsitav vektor. Seetõttu enne kui siirdume süsteemide lahendamise juurde, peame vaatlema vektorfunktsioonide defineerimist Matlab-Octaves. Me teame juba, et funktsiooni saab defineerida järgmise käsuga:

```
funkts. sümbol=@(argumendi sümbol,argumendi sümbol,...)funkts. valem
```

Näiteks funktsiooni $f(x) = \cos(x) + 3x$ saab defineerida käsuga

```
f=@(x)cos(x)+3*x
```

Ühtlasi teame ka seda, et vektorit on võimalik sisestada nii, et kirjutame tema komponendid nurksulgude vahele ja eraldame komadega. Näiteks vektori $b = (2, 6, 1)$ saab sisestada järgmise käsuga:

```
b=[2,6,1]
```

Vektorfunktsiooni defineerimisel tulebki tema valem kirja panna kui vektor, st funktsiooni erinevate komponentide valemid eraldada komadega ja ümbritseda nurksulgudega.

NÄITEÜLESANNE 3. Defineerida kahe muutuva vektorfunktsioon $F(x) = (f_1(x), f_2(x))$, kus $f_1(x) = x_1^2 + x_2$ ja $f_2(x) = \sin(x_1 x_2)$ ning arvutada $F(1, 4)$.

Lahendus. Skript on järgmine:

```

%Funktsiooni defineerimine
F=@(x)[x(1)^2+x(2),sin(x(1)*x(2))];
%Funktsiooni väärtuse arvutamine
vastus=F([1,4])

```

Peale skripti käivitamist saame vastuse

```

vastus =
    5.0000 -0.7568

```

See tähendab, et $F(1, 4) = (5.0000, -0.7568)$. Märkus: skripti viimases käsus on funktsiooni F argument samuti vektor, st Matlab-Octaves tuleb ta esitada kujul $[1,4]$.

Nagu varem öeldud, sobib mittelineaarsete süsteemide $F(x) = 0$ lahendamiseks käsk `fsolve`. Viimase kuju on järgmine:

```
fsolve(F,alglähend)
```

Alglähend on jällegi soovitatav valida otsitava lahendi lähedalt. Matlab-Octave leiab ise sobiva iteratsioonimeetodi süsteemi lahendamiseks.

Kahest võrrandist koosneva kahe tundmatuga süsteemi alglähendi leidmiseks saab kasutada graafilist meetodit. Siis on süsteemis $F(x) = 0$ esineval vektorfunktsioonil 2 komponenti, so $F(x) = (f_1(x), f_2(x))$, kusjuures $x = (x_1, x_2)$ ning süsteem on esitatav kujul

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0, \\ f_2(x_1, x_2) = 0. \end{cases}$$

Seega lahendid esinevad joonte $f_1(x_1, x_2) = 0$ ja $f_2(x_1, x_2) = 0$ lõikumiskohtades.
 NÄITEÜLESANNE 4. Leida süsteemi

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ y + x = 2(y - x)^2 \end{cases}$$

kõik lahendid.

Lahendus. Kõigepealt joonestame süsteemis antud funktsioonide graafikud ja leiame neilt lahendite ligikaudsed asukohad. Selleks koostame skripti:

```
ezplot('x^2/4+y^2-1')
grid on
hold on
ezplot('x+y-2*(y-x)^2')
hold off
```

ja käivitame (NB! teises käsus `ezplot` peame muutuja `x` esimesele kohale tõstma, kui me tahame, et see muutuja asuks horisontaalteljel). Saadud [jooniselt](#) näeme, et süsteemil on 2 lahendit ja need asuvad ligikaudu punktides koordinaatidega $x = 0.4, y = 1$ ja $x = 1.5, y = 0.6$. Need punktid võtamegi alglahenditeks. Käsu `fsolve` kasutamisel peame aga arvestama sellega, et see sisaldab vektorfunktsiooni. Seega me peame muutujatest x ja y moodustama vektori. Olgu selleks z . See tähendab, et $z_1 = x$ ja $z_2 = y$. Süsteemi lahendamiseks sobiv skript võiks välja näha nii:

```
F=@(z)[z(1)^2/4+z(2)^2-1,z(1)+z(2)-2*(z(2)-z(1))^2]
Lahend1=fsolve(F,[0.4,1])
Lahend2=fsolve(F,[1.5,0.6])
```

Peale käivitamist kuvatakse järgmine tulemus:

```
Lahend1 =
    0.21621    0.99414
Lahend2 =
    1.63032    0.57924
```

See tähendab, et süsteemil on järgmised 2 lahendit: $x_1 = 0.21621, y_1 = 0.99414$ ja $x_2 = 1.63032, y_2 = 0.57924$.

HARJUTUSÜLESANNE 1. Leida võrrandi $\frac{10 \sin t}{t} - 1 = 0$ kõik lahendid. Vastav skript salvestada nime `z30.m` all.

[Lahendus](#)

HARJUTUSÜLESANNE 2. Leida võrrandi $r^3 + 0.5 = \sqrt[3]{r}$ kõik positiivsed lahendid. Vastav skript salvestada nime `z31.m` all.

[Lahendus](#)

HARJUTUSÜLESANNE 3. Defineerida $G(z) = (g_1(z), g_2(z), g_3(z))$, kus $g_1(z) = z_1 + z_2, g_2(z) = z_1 z_3$ ja $g_3(z) = \frac{z_2}{z_3}$ ning arvutada $Q = G(1, 2, 3) + G(g_2(1, 1, 1), g_3(2, 2, 2), g_1(4, 4, 4))$. Skript salvestada nime `z33.m` all.

[Skript](#)

Vastus: $Q = (5, 3, 0.7917)$.

HARJUTUSÜLESANNE 4. Leida süsteemi

$$\begin{cases} x = \sin(x - t)^2 - t, \\ x = \sin(t - x) - t \end{cases}$$

kõik lahendid, mis asuvad ristkülikus $1 \leq t \leq 5, -5 \leq x \leq 0$. Skript salvestada nime `z34.m` all.

Lahendus

HARJUTUSÜLESANNE 5. Piirkonnas $-2 \leq x \leq 2$, $-3 \leq y \leq 3$ paikneb ristkülikukujuline plaat, mis on äärtest kinnitatud. Plaadile on asetatud raskus. Plaadiläbipaine punktis $P(x, y)$ on antud valemiga

$$u = 0.0001(4 - x^2)(9 - y^2)(xy + x + 2y + 15).$$

Suurused x , y ja u on antud meetrites. Leida plaadi maksimaalne läbipaine ja punkt, kus see saavutatakse. Skript salvestada faili z35.m.

Lahendus