Tuletise suhtes ilmutamata diferentsiaalvõrrand

Vaatleme diferentsiaalvõrrandit kujul võrrandit

$$F(x, y, y') = 0.$$

Üldjuhul saab võrrandist avaldada:
1) $y' = f(x, y)$,
2) $y = g(x, y')$,
3) $x = h(y, y')$.
Esimese seose saab üldjuhul lahendada õpituid lahendusviise kasutades. Kui tuletise avaldamine pole võimalik või lahendiks saadavad seosed ei rahulda esialgset võrrandit, siisl avaldatakse võrrandist kas otsitav y või sõltumatu muutuja x ja võrrandi lahendamiseks kasutatakse **parametriseerimist.**

Vaatame juhtu, kus võrrandist avaldatakse otsitav funktsioon y. Lähtume seosest

$$y = g(x, y')$$

ning

$$\begin{cases} x = x \\ y' = p \\ y = g(x, p). \end{cases}$$

Teame, et

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Seega

$$\frac{dy}{dx} = p$$

Siit

$$dy = pdx$$

ning alumise seose põhjal

$$dy = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial p}dp.$$

Kahe seose põhjal saame

$$pdx = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial p}dp$$

ehk

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x} - p\right)dx + \frac{\partial g}{\partial p}dp = 0.$$

Lahendame selle võrrandi, saame lahendid $x = \varphi(p, C)$ või $p = \psi(x, C)$ ning need asendame seosesse $y = g(x, p)$. Võrrandi üldlahend

$$y = g(x, \psi(x, C))$$

või parameetri p abil

$$\begin{cases} x = \varphi(p, C) \\ y = g(\varphi(p, c), p). \end{cases}$$

Analoogiliselt käib parametriseerimine ka siis, kui esialgsest võrrandist õnnestub avaldada sõltumatu muutuja x. Sellisel juhul

$$\begin{cases} y = y \\ y' = p \\ x = h(y, p), \end{cases}$$

$$dy = pdx$$

ning

$$\left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{p}\right) dy + \frac{\partial h}{\partial p} dp = 0.$$

Võrrandi üldlahend

$$x = h(y, \xi(y, C))$$

või parameetri p abil

$$\begin{cases} x = h(\xi(p, C), p) \\ y = \xi(p, C). \end{cases}$$

Üldine skeem parametriseerimiseks tuleb kasutusele siis, kui ei õnnestu esialgsest võrrandist ühtegi suurust avaldada. Vaatleme võrrandit

$$F(x, y, y') = 0.$$

Võrrand $F(x, y, z) = 0$ esitab teadupärast pinna $xyz-$ruumis. Sama pinna võib esitada ka parameetriliste võrranditega kujul

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v). \end{cases}$$

Siin $\varphi(u, v),\ \ \psi(u, v),\ \ \chi(u, v)$ on sellised funktsioonid, et

$$F(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \equiv 0 \quad \forall u, v$$

piirkonna H korral (vastavus H ja pinna $F(x, y, z) = 0$ punktide vahel on üksühene ning hõlmab pinna kõik punktid.)

Meil $z = y'$, seega $dy = \chi(u, v)dx$. Leiame ka dy ja dx kahest esimesest seosest

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv,$$

$$dy = \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv.$$

Nüüd

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv = \chi(u, v) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv \right),$$

millest

$$\left(\chi \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) du + \left(\chi \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) dv = 0.$$

Saime võrrandi kujul

$$M(u, v)du + N(u, v)dv = 0$$

Lahend on kujul $u = \tau(v, C)$ või $v = \omega(u, C)$. Lõppvastuseks seega saame

$$\begin{cases} x = \varphi\left(\tau(v, C), v\right) \\ y = \psi\left(\tau(v, C), v\right) \end{cases}$$

või

$$\begin{cases} x = \varphi\left(u, \omega(u, C)\right) \\ y = \psi\left(u, \omega(u, C)\right). \end{cases}$$

Sellist üleminekut esialgselt võrrandilt nimetatakse parametriseerimiseks kahe parameetri abil.

Näide: $y = x(y')^2 + (y')^2$
Võrrandist on võimalik y' tuletis avaldada -

$$y' = \pm\sqrt{\frac{y}{x+1}}$$

Lihtsam on aga kasutada parametriseerimist. Valime parameetrid

$$\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = (u+1)v^2 \end{cases}$$

Siit

$$dx = du, \quad dy = v^2du + 2v(u+1)dv, \quad dy = vdx$$

$$v^2du + 2(u+1)vdv = vdu$$

$$(v^2 - v)du + 2(u+1)vdv = 0.$$

$$v(v-1)(u+1)\left(\frac{du}{u+1}+2\frac{dv}{v-1}\right)=0$$

Selle võrrandi lahenditeks on $v=0$, $v=1$, $u=-1$ ja $u=\frac{C}{(v-1)^2}-1$. Viimane neist sisaldab ka lahendit $u=-1$ konstandi $C=0$ korral. Seega saame lähtevõrrandi lahendid kujul

$$\begin{cases} x=u \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=u \\ y=u+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{C}{(v-1)^2}-1 \\ y=\frac{C}{(v-1)^2}v^2 \end{cases}$$

Parameetrite ellimineerimisel saame

$$y = 0, \quad y = x + 1, \quad y = (C \pm \sqrt{x+1})^2$$

Kui $C = 0$, siis on üldlahendi seosega antud ka $y = x + 1$. Seega on lahendiks $y = 0$ ja $y = (C \pm \sqrt{x+1})^2$.

Lagrange'i diferentsiaalvõrrand

Lagrange'i DV nimetatakse võrrandit

$$A(y')y + B(y')x + C(y') = 0,$$

mis on otsitava y ja sõltumatu muutuja x suhtes lineaarne võrrand. Kui $A(y') \neq 0$, saab võrrandi viia kujule

$$y + \frac{B(y')}{A(y')}x + \frac{C(y')}{A(y')} = 0,$$

siit

$$y = -\frac{B(y')}{A(y')}x - \frac{C(y')}{A(y')}.$$

Tähistame $-\frac{B(y')}{A(y')} = \varphi(y')$ ja $-\frac{C(y')}{A(y')} = \psi(y')$, siis

$$y = \varphi(y')x + \psi(y').$$

Parametriseerime

$$\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = u\varphi(v) + \psi(v). \end{cases}$$

Siit $dx = du$, $dy = vdx = vdu$, $dy = \varphi(v)du + [u\varphi'(v) + \psi'(v)]\, dv$.

$$vdu = \varphi(v)du + \left[u\varphi'(v) + \psi'(v)\right] dv,$$

millest

$$(\varphi(v) - v)du + \left[u\varphi'(v) + \psi'(v)\right] dv = 0$$

Saadud võrrand on lineaarne DV $u = u(v)$ suhtes, sest

$$(\varphi(v) - v)u' + \varphi'(v)u = -\psi'(v)$$

Kui $\varphi(v) \neq v$, on Lagrange'i võrrandi üldlahend kujul

$$\begin{cases} x = u(v, C) \\ y = u(v, C)\varphi(v) + \psi(v) \end{cases}$$

Kui $\varphi(v) = v$, siis on võrrand kujul

$$y = xy' + \psi(y').$$

Sellist võrrandit nimetatakse **Clairaut' võrrandiks.** Ka Clairaut' võrrandi lahendamiseks kasutatakse parametriseerimist

$$\begin{cases} x = u \\ y' = v \\ y = uv + \psi(v) \end{cases}$$

Siis $dx = du$, $dy = vdx = vdu$, $dy = vdu + [udv + \psi'(v)]\, dv$ ning

$$vdu + \left[u + \psi'(v)\right] = vdu,$$

millest

$$\left[u + \psi'(v)\right] = 0$$

Siit $u = -\psi'(v)$ ja $v = C$ ehk $x = -\psi'(v)$. Asendame esialgsesse võrrandisse, saame

$$y = -v\psi'(v) + \psi(v).$$

Parametriseeringust

$$x = u$$

$$y = Cu + \psi(C).$$

Viimasest seosest $y = Cx + \psi(x)$.