Konstantsete kordajatega lineaarsed homogeensed diferentsiaalvõrrandite süsteemid

Vaatame

$$\overline{y'} = A\overline{y}, \tag{1}$$

kus $A = (a_{ij})$ on konstantne reaalarvuline maatriks. Süsteemi võib esitada ka kujul

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ \ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

Konstantsete kordajatega süsteemi lahendamiseks kasutatakse üldiselt ühele võrrandile taandamise juhtu, kusjuures ka saadav võrrand on konstantsete kordajatega lineaarne DV.

Ent kui n osutub piisavalt suureks, on ühele võrrandile taandamine tülikas ja lihtsam oleks kasutada teisi lahendusmeetodeid.
Vaatame lähemalt Euleri meetodit. Otsime (1) lahendit kujul

$$\overline{y} = e^{kx}\overline{p},$$

kus $\overline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)^T$ $(p_i = const,\ i = 1, 2 \ldots, n)$. Iga lahend annab samasuse, seega

$$ke^{kx}\overline{p} \equiv Ae^{kx}\overline{p}$$

$$(A - kE)\overline{p} = 0$$

Saime algebralise süsteemi tundmatute määramiseks. Mittetriviaalse lahendi leidmiseks nõuame, et

$$\det(A - kE) = 0$$

ehk

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0$$

Siit saame $n-$ astme polünoomi k suhtes. Sellist hulkliiget nimetatakse süsteemi (1) karakteristlikuks võrrandiks ja selle lahendeid HDVS karakteristlikeks väärtusteks.

I Kui karakteristlikud väärtused $k_1, k_2, \dots, k_n$ on ühekordsed, st nende hulgas ei ole omavahel võrdseid, siis saab neist moodustada n erinevat lahendit

$$y^1 = (p_1^1 e^{k_1 x}, p_2^1 e^{k_1 x}, \dots, p_n^1 e^{k_1 x}),$$
$$y^2 = (p_1^2 e^{k_2 x}, p_2^2 e^{k_2 x}, \dots, p_n^2 e^{k_2 x}),$$
$$\dots\dots\dots$$
$$y^n = (p_1^n e^{k_n x}, p_2^n e^{k_n x}, \dots, p_n^n e^{k_n x}),$$

kus p_i^j $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ on konstandid.

Näide: Lahendada $\begin{cases} y' + y - 8z = 0 \\ z' - y - z = 0 \end{cases}$
Antud võrrandisüsteem on konstantsete kordajatega lineaarne homogeenne süsteem, mille saab esitada maatrikskujul

$$\overline{y}' = A\overline{y},$$

kus $\overline{y} = (y, z)^T$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Siit

$$\begin{vmatrix} -1-k & 8 \\ 1 & 1-k \end{vmatrix} = -(1+k)(1-k) - 8 = k^2 - 1 - 8 = 0$$

$$k^2 - 9 = 0$$

$$k_1 = 3, \quad k_2 = -3$$

Vektorite $\overline{p^1}$ ja $\overline{p^2}$ määramiseks lahendame süsteemid

$$\begin{cases} -4p_1 + 8p_2 = 0 \\ p_1 - 2p_2 = 0 \end{cases}$$

ja

$$\begin{cases} 2p_1 + 8p_2 = 0 \\ p_1 + 4p_2 = 0 \end{cases}$$

$$\overline{p^1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{p^2} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Seega $\overline{y^1} = (2e^{3x}, e^{3x})^T$ ja $\overline{y^2} = (4e^{-3x}, -e^{-3x})^T$. Süsteemi lahendiks on seega

$$\begin{cases} y = 2C_1 e^{3x} + 4C_2 e^{-3x} \\ z = C_1 e^{3x} - C_2 e^{-3x} \end{cases}$$

II Kompleksne karakteristlik väärtus annab kaks reaalset lahendit (vt 14. loeng).

Näide: Lahendada $\begin{cases} y' = 2y - z \\ z' = y + 2z \end{cases}$

Antud võrrandisüsteem maatrikskujul

$$\overline{y}' = A\overline{y},$$

kus $\overline{y} = (y, z)^T$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Siit

$$\begin{vmatrix} 2-k & -1 \\ 1 & 2-k \end{vmatrix} = (2-k)^2 + 1 = k^2 - 4k + 5 = 0$$

$$k^2 - 4k + 5 = 0$$

$$k_1 = 2 + i, \quad k_2 = 2 - i$$

Vaja lahendada süsteem

$$\begin{cases} [2-(2+i)]p_1 - p_2 = 0 \\ p_1 + [2-(2+i)]p_2 = 0 \end{cases}$$

Kui $p_1 = 1$, siis $p_2 = -i$. Järelikult $\overline{y} = (e^{(2+i)x}, -ie^{(2+i)x})^T$. Meil vaja reaal- ja imaginaarosa,

$$\mathrm{Re}\overline{y} = (e^{2x}\cos x, e^{2x}\sin x)$$

$$\mathrm{Im}\overline{y} = (e^{2x}\sin x, -e^{2x}\cos x)$$

Süsteemi lahendiks saame

$$\begin{cases} y = C_1 e^{2x}\cos x + C_2 e^{2x}\sin x \\ z = C_1 e^{2x}\sin x - C_2 e^{2x}\cos x \end{cases}$$

Konstantsete kordajatega lineaarsed mittehomogeensed diferentsiaalvõrrandite süsteemid

Vaatame

$$\overline{y'} = A\overline{y} + \overline{g}, \tag{2}$$

kus $A = (a_{ij})$ on konstantne reaalarvuline maatriks, $\overline{g} = (g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x))^T$. Süsteemi võib esitada ka kujul

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + g_1(x) \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + g_2(x) \\ \ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + g_n(x) \end{cases}$$

14. loengu põhjal teame, et sellise süsteemi üldlahend esitub kujul

$$\overline{y} = \overline{y_H} + \overline{y_*}.$$

$\overline{y_*}$ leidmiseks saab kasutada Lagrange'i meetodit või määramata kordajate meetodit.

Lagrange'i meetod Teades lin. hom. DVS üldlahendit kujul

$$\overline{y_H} = C_1 y^1 + C_2 y^2 + \ldots + C_n y^n$$

asendame konstandid C_i suurustega $C_i(x)$, mille täpset kuju me ei tea. Seega

$$\overline{y_*} = C_1(x) y^1 + C_2(x) y^2 + \ldots + C_n(x) y^n$$

Et tegu on meie süsteemi lahendiga, siis

$$C_1'(x) y_i^1 + C_2'(x) y_i^2 + \ldots + C_n'(x) y_i^n = g_i(x),$$

$i = 1, 2 \ldots, n$. See süsteem on üheselt lahenduv ning

$$C_i'(x) = \varphi_i(x)$$

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x)dx + \overline{C},$$

$$\overline{y_*} = \sum_{i=1}^{n} \left(\int \varphi_i(x)dx \right) y^i.$$

Näide: Lahendada $\begin{cases} y' = -y + 8z + 1 \\ z' = y + z - x \end{cases}$

Süsteem maatrikskujul

$$\overline{y}' = A\overline{y} + \overline{g},$$

kus $\overline{y} = (y, z)^T$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ja $\overline{g} = (1; -x)^T$.

Et vastava lin. hom. DVS lahendiks on

$$\begin{cases} y_H = 2C_1 e^{3x} + 4C_2 e^{-3x} \\ z_H = C_1 e^{3x} - C_2 e^{-3x} \end{cases},$$

siis otsime lin. mittehom. DVS lahendit kujul

$$\begin{cases} y_* = 2C_1(x)e^{3x} + 4C_2(x)e^{-3x} \\ z_* = C_1(x)e^{3x} - C_2(x)e^{-3x} \end{cases}$$

Suurused $C_1(x)$ ja $C_2(x)$ määrame süsteemist

$$\begin{cases} 2C_1'(x)e^{3x} + 4C_2'(x)e^{-3x} = 1 \\ C_1'(x)e^{3x} - C_2'(x)e^{-3x} = -x \end{cases}$$

$$C_2'(x) = \frac{1}{6}(1+x)e^{3x}, \quad C_2(x) = \frac{1}{18}e^{3x}\left(\frac{2}{3}+x\right)$$

$$C_1'(x) = \frac{1}{6}(1-2x)e^{-3x}, \quad C_1(x) = -\frac{1}{18}e^{-3x}\left(\frac{2}{3}-2x\right)$$

Nüüd

$$y_* = \frac{4}{9}x + \frac{2}{27}$$

$$z_* = \frac{1}{18}x - \frac{2}{27}$$

Süsteemi üldlahendiks

$$\begin{cases} y = 2C_1 e^{3x} + 4C_2 e^{-3x} + \frac{4}{9}x + \frac{2}{27} \\ z = C_1 e^{3x} - C_2 e^{-3x} + \frac{1}{18}x - \frac{2}{27} \end{cases}$$

Määramata kordajate meetod
Kui $g_i(x) = P_r(x)e^{ax}$, kus a on konstant ning $P_r(x)$ on $r-$astme polünoom, siis saab otsida

$$y_{*i} = Q_{r+s}(x)e^{ax},$$

kus $Q_{r+s}(x)$ on $r+s$-astme polünoom, ($s=0$, kui a pole karakteristlikuks väärtuseks).