Lineaarne diferentsiaalvõrrandite süsteem

DV süsteemi nimetatakse lineaarseks, kui otsitavad funktsioonid ja nende tuletised on esitatud võrrandisüsteemi võrrandites lineaarselt. Normaalkujuline lineaarne DV süsteem on kujul

$$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}(x)y_1(x) + a_{12}(x)y_2(x) + \ldots + a_{1n}(x)y_n(x) + g_1(x) \\ y_2'(x) = a_{21}(x)y_1(x) + a_{22}(x)y_2(x) + \ldots + a_{2n}(x)y_n(x) + g_2(x) \\ \ldots \\ y_n'(x) = a_{n1}(x)y_1(x) + a_{n2}(x)y_2(x) + \ldots + a_{nn}(x)y_n(x) + g_n(x) \end{cases} \tag{1}$$

Kui $g_i(x) \equiv (i = 1, 2, \ldots, n)$, siis räägitakse lineaarsest homogeensest DV süsteemist, vastasel korral lineaarsest mittehomogeensest DV süsteemist.

Vektorsümboolikat kasutades saab süsteemi (1) esitada kujul

$$\overline{y'} = A(x)\overline{y(x)} + \overline{g(x)}, \tag{2}$$

kus $\overline{y(x)} = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$ on otsitav vektorfunktsioon, $\overline{g(x)} = (g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x))$ on vabaliikmete vektor ja kordajate maatriks $A(x)$ on kujul

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

Lineaarse homogeense DV süsteemi saab siis kirjutada kujule

$$\overline{y'(x)} = A(x)\overline{y(x)}, \tag{3}$$

Selle süsteemi lahendiks on näiteks nullvektor $\overline{y} \equiv 0$, sellisel juhul räägitakse ka triviaalsest lahendist.

Lisame HDVS-le algtingimused $\overline{y(x_0)} = \overline{y^0}$, kus

$$\overline{y^0} = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \dots \\ y_n^0 \end{pmatrix} \quad (2')$$

Teoreem

Kui suurused $a_{ij}(x)$, $g_i(x)$ *(*$i, j = 1, 2, \dots, n$*) on pidevad funktsioonid* $\forall x \in (a, b)$*, ja* $x_0 \in (a, b)$*, siis ülesandel (2),(2') leidub täpselt üks lahend* $\overline{y(x)}$*, mis rahuldab tingimusi (2').*

Lemma

Kui $\overline{y^1(x)}, \overline{y^2(x)}, \ldots, \overline{y^m(x)}$ *on lineaarse homogeense DV süsteemi (3) lahenditeks, siis mistahes konstantide* $c_1, c_2, \ldots, c_m$ *korral on ka* $\sum\limits_{k=1}^{m} c_k \overline{y^k(x)}$ *selle süsteemi lahendiks.*

Lemma

Kui $\overline{y^*(x)}$ *ja* $\overline{y^{**}(x)}$ *on mittehomogeense DV süsteemi (2) lahenditeks, siis* $\overline{y^*(x)} - \overline{y^{**}(x)}$ *on homogeense süsteemi (3) lahendiks.*

Lemma

Kui $\overline{y^*(x)}$ *on mittehomogeense süsteemi (2) lahendiks ja* $\overline{y(x)}$ *vastava homogeense süsteemi (3) lahendiks, siis* $\overline{y^*(x)} + \overline{y(x)}$ *on ka mittehomogeense süsteemi (2) lahendiks.*

Lemma

Kui $\overline{y^*(x)}$ *on süsteemi*

$$\overline{y'(x)} = A(x)\overline{y(x)} + \overline{g_1(x)}$$

lahendiks ja $\overline{y^{**}(x)}$ *on süsteemi*

$$\overline{y'(x)} = A(x)\overline{y(x)} + \overline{g_2(x)}$$

lahendiks, siis $\overline{y^*(x)} + \overline{y^{**}(x)}$ *on süsteemi*

$$\overline{y'(x)} = A(x)\overline{y(x)} + \overline{g_1(x)} + \overline{g_2(x)}$$

lahendiks.

Lemma

Kui kompleksne vektorfunktsioon $\overline{y(x)} = \overline{u(x)} + i\overline{v(x)}$ *on süsteemi (3) lahendiks, siis ka* $\overline{u(x)}$ *ja* $\overline{v(x)}$ *on süsteemi (3) lahenditeks.*

Lineaarse homogeense DV süsteemi (3) n lineaarselt sõltumatut lahendit $\overline{y^1(x)}, \overline{y^2(x)}, \ldots, \overline{y^n(x)}$ moodustavad lahendite fundamentaalsüsteemi (LFS). Kui on teada süsteemi (3) LFS, siis süsteemi üldlahendiks on

$$\overline{y(x)} = \sum_{i=1}^{n} c_i \overline{y^i(x)}$$

Lineaarse homogeense DV süsteemi (3) **fundamentaalmaatriksiks** nimetatakse maatriksit

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1^1(x) & y_1^2(x) & \ldots & y_1^n(x) \\ y_2^1(x) & y_2^2(x) & \ldots & y_2^n(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n^1(x) & y_n^2(x) & \ldots & y_n^n(x) \end{pmatrix},$$

mille veergudeks on süsteemi (3) n lineaarselt sõltumatut lahendit $\overline{y^1}, \overline{y^2}, \ldots, \overline{y^n}$.

Kehtib

$$Y'(x) = A(x)Y(x).$$

Süsteemil (3) leidub lõpmata palju fundamentaalmaatrikseid.

Teoreem

Olgu $\overline{y^*(x)}$ *lineaarse mittehomogeense süsteemi (2) mingi erilahend ja* $\overline{y^1(x)}, \overline{y^2(x)}, \ldots, \overline{y^n(x)}$ *vastava homogeense süsteemi (3) lahendite fundamentaalsüsteem, siis süsteemi (2) üldlahend esitub kujul*

$$\overline{y(x)} = \overline{y^*(x)} + \sum_{i=1}^{n} c_i \overline{y^i(x)},$$

kus $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *on suvalised konstandid.*

Lineaarsed konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrandite süsteemid

Olgu

$$\overline{y'} = A\overline{y},$$

kus $A = (a_{ij})$ on konstantne reaalarvuline maatriks. Süsteemi võib esitada ka kujul

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ \ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

Konstantsete kordajatega süsteemi lahendamiseks kasutatakse üldiselt ühele võrrandile taandamise juhtu, kusjuures ka saadav võrrand on konstantsete kordajatega lineaarne DV.

Ent kui n osutub piisavalt suureks, on ühele võrrandile taandamine tülikas ja lihtsam oleks kasutada teisi lahendusmeetodeid.

I Kui karakteristlikud väärtused $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ on ühekordsed, st nende hulgas ei ole omavahel võrdseid, siis saab neist moodustada n erinevat lahendit

$$y^1 = (p_1^1 e^{\lambda_1 x}, p_2^1 e^{\lambda_1 x}, \ldots, p_n^1 e^{\lambda_1 x}),$$

$$y^2 = (p_1^2 e^{\lambda_2 x}, p_2^2 e^{\lambda_2 x}, \ldots, p_n^2 e^{\lambda_2 x}),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$y^n = (p_1^n e^{\lambda_n x}, p_2^n e^{\lambda_n x}, \ldots, p_n^n e^{\lambda_n x}),$$

kus p_i^j $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ on konstandid.

II Kompleksne karakteristlik väärtus annab kaks reaalset lahendit (vt Lemma 5).