

Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid

Üldkuju:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(n_2)}, \dots, y_m, y_m', \dots, y_m^{(n_m)}) = 0 \\ F_2(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(n_2)}, \dots, y_m, y_m', \dots, y_m^{(n_m)}) = 0 \\ \dots \\ F_m(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(n_2)}, \dots, y_m, y_m', \dots, y_m^{(n_m)}) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Normaalkuju:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (2)$$

Teoreem

Olgu funktsioonid $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) pidevad muutujate x, y_1, y_2, \dots, y_n piirkonnas D . Siis läbi iga piirkonna D iga punkti $(x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ kulgeb vähemalt üks diferentsiaalvõrrandite süsteemi (4) integraalkõver.

Teoreem

Olgu funktsioonid $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ja nende osatuletised $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) määratud ja pidevad muutujate x, y_1, y_2, \dots, y_n piirkonnas D . Siis läbi iga piirkonna D iga punkti $(x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ kulgeb parajasti üks diferentsiaalvõrrandite süsteemi (4) integraalkõver.

Üldlahend:

$$y_i = \varphi_i(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Konstantide väärtuste fikseerimisel saadavaid lahendeid nimetatakse erilahenditeks.

Diferantsiaalvõrrandite süsteeme lahendatakse:

- 1) ühele kõrgemale võrrandile taandamise teel;
- 2) esimeste integraalide abil;
- 3) integreeruvate kombinatsioonide leidmise teel.

Näide 1: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Esimese võrrandi diferentseerimisel saame

$$y'' = z'$$

ning asendades saadud tulemuse teise võrrandisse, saame

$$y'' = y.$$

Et $y'' - y = 0$ on konstantsete kordajatega HDV, siis karakteristik võrrand on

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda = \pm 1$$

ning $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Süsteemi lahendiks

$$z = C_1 e^x - C_2 e^{-x}$$

$$\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \\ z = C_1 e^x - C_2 e^{-x} \end{cases}$$

Definitsioon

Piirkonnas D määratud mittekonstantset pidevalt diferentseeruvat funktsiooni

$$\psi(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

nimetatakse normaalkujulise süsteemi (2) esimeseks integraaliks, kui muutujate y_1, y_2, \dots, y_n asendamisel süsteemi (2) mistahes lahendiga $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ muutub see funktsion konstantseks x suhtes:

$$\psi(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) \equiv C.$$

Definitsioon

Süsteemi (2) esimesed integraalid $\psi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) on sõltumatud piirkonnas D , kui

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall (x, y_1, y_2, \dots, y_n) \in D.$$

Lause

Kui diferentsiaalvõrrandite süsteemi (2) esimesed integraalid $\psi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) on sõltumatud, siis süsteemi (2) üldlahendiks ilmutamata kujul on

$$\psi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Näide 2: Lahendada HDVS

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

Lahendame süsteemi esimeste integraalide abil. Liidame süsteemi mõlemad võrrandid, saame

$$y' + z' = y + z,$$

siit

$$\frac{d(y + z)}{dx} = y + z$$

$$\frac{d(y + z)}{y + z} = dx$$

$$\ln |y + z| - x = C_1$$

Siit saame

$$\psi_1(x, y, z) = \ln |y + z| - x.$$

Teise esimese integraali leidmiseks lahutame süsteemi võrrandid, saame

$$y' - z' = z - y.$$

Sarnaselt eelneva lahenduskaiguga saame

$$\ln |y - z| + x = C_2$$

ja

$$\psi_2(x, y, z) = \ln |y - z| + x.$$

Kontrollime sõltumatust.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{y+z} & \frac{1}{y+z} \\ \frac{1}{y-z} & \frac{-1}{y-z} \end{vmatrix} = -\frac{1}{y^2 - z^2} - \frac{1}{y^2 - z^2} = -\frac{2}{y^2 - z^2} \neq 0$$

Leitud kahest sõltumatust esimesest integraalist saame leida süsteemi lahendid ilmutatud kujul. Selleks saame

$$\begin{cases} \ln |y + z| - x = C_1 \\ \ln |y - z| + x = C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + z = C_3 e^x \\ y - z = C_4 e^{-x} \end{cases}$$

Siit

$$\begin{cases} y = 0,5(C_3 e^x + C_4 e^{-x}) \\ z = 0,5(C_3 e^x - C_4 e^{-x}) \end{cases}$$