

Ekstreemumülesannete lahendamine

Vaatame m -muutuja funktsioon $f(x)$, mille argumendiks on $x = (x_1; x_2; \dots; x_m)$ ning vaja on leida selle funktsiooni maksimum või miinimum. Funktsiooni miinimumi leidmiseks saab kasutada iteratiivseid meetodeid, mille korral liigutakse järk-järgult miinimumpunkti poole funktsiooni kahanemise suunas. Olgu algähend $x^0 = (x_1^0; x_2^0; \dots; x_m^0) \in R^m$ ja arvutame funktsiooni $f(x)$ gradiendi punktis x^0 :

$$v^0 = \text{grad}f(x^0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x^0); \dots; \frac{\partial}{\partial x_m} f(x^0) \right).$$

Antigradiend ehk vektor $-v^0$ määrab suuna, milles funktsioon $f(x)$ kahaneb kõige kiiremini punktist x^0 lähtudes. Sellest tulenevalt leiame uue lähendi x^1 selliselt, et liigume punktist x^0 teatud sammu võrra vektori $-v^0$ suunas, st arvutame $x^1 = x^0 - t_0 v^0$. Arv t_0 on sammu pikkus, mis tuleb valida selliselt, et funktsioon f kahaneks, st kehtiks võrratus $f(x^1) < f(x^0)$. Punktist x^1 liigume edasi analoogiliselt. Sellist eeskirja kasutavaid meetodeid nimetatakse **gradientmeetoditeks**. Optimaalne sammu pikkus t_{n-1} on selline, mille korral funktsioon $f(x)$ on punktist x^{n-1} lähtuval antigradiendi $-v^{n-1}$ suunal minimaalne. Selleks tuleb valida t_{n-1} nii, et ühe muutuja t funktsioon $f(x^{n-1} - tv^{n-1})$ saavutaks miinimumi punktis $t = t_{n-1}$. Kui gradientmeetodis on sammu pikkus valitud sellise eeskirja kohaselt, siis nimetatakse seda meetodit **kiireima languse meetodiks**. Seega tuleb kiireima languse meetodis n -ndal sammul lahendada ühe muutuja funktsiooni miinimumülesanne

$$f(x^{n-1} - t_{n-1}v^{n-1}) = \min_{t \in \mathbb{R}} f(x^{n-1} - tv^{n-1}).$$

Kiireima languse meetod ruutfunktsiooni korral

Olgu $f(x)$ ruutfunktsioon, st

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^m \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^m \beta_i x_i + \gamma,$$

kus $\alpha_{i,j}$, β_i ja γ on konstandid.

Olgu

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mm} \end{pmatrix}$$

sümmeetriline, st $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$.

Ruutfunktsiooni saab lühemalt kirjutada kujule

$$f(x) = Ax \cdot x + \beta \cdot x + \gamma.$$

Miimumi leidumiseks

$$Ax \cdot x > 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Leiame osatuletised

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} f(x) &= \frac{\partial}{\partial x_k} [Ax \cdot x + \beta \cdot x + \gamma] = \\ &= \sum_{i,j=1}^m \alpha_{i,j} \frac{\partial x_i}{\partial x_k} x_j + \sum_{i,j=1}^m \alpha_{i,j} x_i \frac{\partial x_j}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^m \beta_i \frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \\ &= \sum_{j=1}^m \alpha_{k,j} x_j + \sum_{i=1}^m \alpha_{i,j} x_i + \beta_k = \sum_{i=1}^m (\alpha_{k,i} + \alpha_{i,k}) x_i + \beta_k. \end{aligned}$$

Sümmeetrilisusest $\alpha_{k,i} + \alpha_{i,k} = \alpha_{k,i} + \alpha_{k,i} = 2\alpha_{k,i}$. Seega

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(x) = 2 \sum_{i=1}^m \alpha_{k,i} x_i + \beta_k.$$

Järelikult

$$\text{grad}f(x) = 2Ax + \beta$$

ning

$$v^{n-1} = \text{grad}f(x^{n-1}) = 2Ax^{n-1} + \beta.$$

Määrame ka sammu pikkuse t . Selleks

$$f(x^{n-1} - tv^{n-1}) = A(x^{n-1} - tv^{n-1}) \cdot (x^{n-1} - tv^{n-1}) + \beta \cdot (x^{n-1} - tv^{n-1}) + \gamma.$$

Leiame tuletise muutuja t suhtes

$$\frac{d}{dt}f(x^{n-1} - tv^{n-1}) = -Av^{n-1} \cdot x^{n-1} - Ax^{n-1} \cdot v^{n-1} + 2tAv^{n-1} \cdot v^{n-1} - \beta \cdot v^{n-1}.$$

Teadupärast saab seosest $\frac{d}{dt}f(x^{n-1} - tv^{n-1}) = 0$ määrata optimaalse sammu pikkuse

$$t_{n-1} = \frac{Av^{n-1} \cdot x^{n-1} + Ax^{n-1} \cdot v^{n-1} + \beta \cdot v^{n-1}}{2Av^{n-1} \cdot v^{n-1}}.$$

Funktsioonide lähendamine

Funktsiooni lähendamine ehk **interpoleerimine** on funktsiooni jätkamine.

Olgu antud lõigul $[a, b]$ $n + 1$ punkti $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Selliseid punkte nimetatakse interpolatsioonisõlmedeks. Olgu samas teada ka funktsiooni $f(x)$ väärtused neis sõlmedes $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$. Kui funktsiooni $f(x)$ väärtused väljaspool sõlmi pole teada, saabki rääkida interpolatsiooniülesandest: leida mingi funktsioon $\Phi(x)$ nii, et kehtiks tingimused

$$\Phi(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Üldisem interpolatsiooniülesanne

$$\Phi^{(i)}(x_j) = f^{(i)}(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad i = 0, 1, \dots$$

Leidub parajasti üks ülimalt n -astme polünoom

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^n L_{n,i}(x)f(x_i),$$

mis rahuldab interpolatsioonitingimusi ja kus

$$L_{n,i}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

Sellist polünoomi nimetatakse **Lagrange'i interpolatsioonipolünoomiks**.