# Mittelineaarsete võrrandisüsteemide ligikaudne lahendamine

Vaatleme mittelineaarset võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} f_1(x_1; x_2; \ldots; x_m) = 0 \\ f_2(x_1; x_2; \ldots; x_m) = 0 \\ \ldots \\ f_m(x_1; x_2; \ldots; x_m) = 0 \end{cases}$$

kus $f_1, \ldots, f_m$ on funktsioonid.
Olgu otsitavate vektor $x = (x_1; x_2; \ldots; x_m)$.
Võrrandisüsteemi vasakust poolest saab moodustuda vektori $F(x) = (f_1(x); f_2(x); \ldots; f_m(x))$. Vektor $F(x)$ sõltub vektorist $x$, seega on suurus $F$ vektorfunktsioon ning süsteemi saab kirja panna vektorvõrrandiga $F(x) = 0$.

# Harilik iteratsioonimeetod

Hariliku iteratsioonimeetodi saamiseks on vaja süsteem $F(x) = 0$ viia kujule $x = G(x)$, kus $G(x) = (g_1(x); g_2(x); \ldots; g_m(x))$, ehk

$$\begin{cases} x_1 = g_1(x_1; x_2; \ldots; x_m) \\ x_2 = g_2(x_1; x_2; \ldots; x_m) \\ \ldots \\ x_m = g_m(x_1; x_2; \ldots; x_m) \end{cases}$$

Kui on antud alglähend $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$, siis järgmise lähendi saab leida eeskirjast $x^1 = G(x^0)$, järgmisena $x^2 = G(x^1)$, jne. **Hariliku iteratsioonimeetodi** kuju on seega

$$x^n = G(x^{n-1})$$

või võrrandite kaupa

$$\begin{cases} x_1^n = g_1(x_1^{n-1}; x_2^{n-1}; \ldots; x_m^{n-1}) \\ x_2^n = g_2(x_1^{n-1}; x_2^{n-1}; \ldots; x_m^{n-1}) \\ \ldots \\ x_m^n = g_m(x_1^{n-1}; x_2^{n-1}; \ldots; x_m^{n-1}) \end{cases}$$

Siit on lihtne tuletada **Seideli iteratsioonimeetodi** (või ka Gaussi-Seideli iteratsioonimeetod) eeskiri:

$$\begin{cases} x_1^n = g_1(x_1^{n-1}; x_2^{n-1}; x_3^{n-1}; \ldots; x_m^{n-1}) \\ x_2^n = g_2(x_1^n; x_2^{n-1}; x_3^{n-1} \ldots; x_m^{n-1}) \\ x_3^n = g_3(x_1^n; x_2^n; x_3^{n-1} \ldots; x_m^{n-1}) \\ \ldots \\ x_m^n = g_m(x_1^n; x_2^n; \ldots; x_m^{n-1}) \end{cases}$$

Olgu meil teada süsteemi $F(x) = 0$ täpne lahend $x^*$, siis ka $x^* = G(x^*)$. Lähendi $x^n$ erinevust täpsest lahendist $x^*$ iseloomustab nende vaheline kaugus $||x^n - x^*||$.

Kui

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} ||x^n - x^*|| = 0,$$

siis koondub lähend $x^n$ täpseks lahendiks $x^*$.

Oluline tingimus koondumiseks

$$||G'(x)|| \leq q < 1.$$

**Teoreem**

*Leidugu süsteemi $F(x) = 0$ lahendit $x^*$ sisaldav kera $B$, milles on täidetud võrratus $\|G'(x)\| \leq q < 1$. Peale selle eeldame, et vektorfunktsioon $G(x)$ ei vii kerast $B$ välja, st iga $x \in B$ korral $G(x) \in B$. Olgu alglähend $x^0$ valitud hulgast $B$, siis koondub nii hariliku kui ka Seideli iteratsioonimeetodiga arvutatud lähendite jada $x^n$ täpseks lahendiks $x^*$. Seejuures kehtib veahinnang*

$$\|x^n - x^*\| \leq \frac{q^n}{1-q}\|x^1 - x^0\|.$$

**Harilik iteratsioonimeetod lineaarsete süsteemide korral**

Vaatame süsteemi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = y_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m = y_m. \end{cases}$$

Seda süsteemi võib vaadelda kui erijuhtu mittelineaarsest süsteemist

$$\begin{cases} f_1(x_1; x_2; \ldots; x_m) = 0 \\ f_2(x_1; x_2; \ldots; x_m) = 0 \\ \ldots \\ f_m(x_1; x_2; \ldots; x_m) = 0 \end{cases},$$

kus $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{im}x_m - y_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Leiame lineaarse süsteemi jaoks hariliku iteratsioonimeetodi ja Seideli meetodi kuju. Selleks järjestame võrrandid ümber nii, et $a_{ii} \neq 0$ ning jagame $i-$nda võrrandi kordajaga $a_{ii}$ läbi. Saame

$$\begin{cases} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 + \ldots + \frac{a_{1m}}{a_{11}} x_m = \frac{y_1}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 + x_2 + \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3 + \ldots + \frac{a_{2m}}{a_{22}} x_m = \frac{y_2}{a_{22}} \\ \ldots \\ \frac{a_{m1}}{a_{mm}} x_1 + \frac{a_{m2}}{a_{mm}} x_2 + \frac{a_{m3}}{a_{mm}} x_3 + \ldots + x_m = \frac{y_m}{a_{mm}}. \end{cases}$$

Siit

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 - \ldots - \frac{a_{1m}}{a_{11}} x_m + \frac{y_1}{a_{11}} \\ x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3 - \ldots - \frac{a_{2m}}{a_{22}} x_m + \frac{y_2}{a_{22}} \\ \ldots \\ x_m = -\frac{a_{m1}}{a_{mm}} x_1 - \frac{a_{m2}}{a_{mm}} x_2 - \frac{a_{m3}}{a_{mm}} x_3 - \ldots - \frac{a_{m,m-1}}{a_{mm}} x_{m-1} + \frac{y_m}{a_{mm}}. \end{cases}$$

Seega hariliku iteratsioonimeetodi kuju lineaarse võrrandisüsteemi jaoks on

$$\begin{cases} x_1^n = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{n-1} - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{n-1} - \ldots - \frac{a_{1m}}{a_{11}}x_m^{n-1} + \frac{y_1}{a_{11}} \\ x_2^n = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{n-1} - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3^{n-1} - \ldots - \frac{a_{2m}}{a_{22}}x_m^{n-1} + \frac{y_2}{a_{22}} \\ \ldots \\ x_m^n = -\frac{a_{m1}}{a_{mm}}x_1^{n-1} - \frac{a_{m2}}{a_{mm}}x_2^{n-1} - \frac{a_{m3}}{a_{mm}}x_3^{n-1} - \ldots - \frac{a_{m,m-1}}{a_{mm}}x_{m-1}^{n-1} + \frac{y_m}{a_{mm}}. \end{cases}$$

ja Seideli meetodi kuju on

$$\begin{cases} x_1^n = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{n-1} - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{n-1} - \ldots - \frac{a_{1m}}{a_{11}}x_m^{n-1} + \frac{y_1}{a_{11}} \\ x_2^n = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{n} - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3^{n-1} - \ldots - \frac{a_{2m}}{a_{22}}x_m^{n-1} + \frac{y_2}{a_{22}} \\ \ldots \\ x_m^n = -\frac{a_{m1}}{a_{mm}}x_1^{n} - \frac{a_{m2}}{a_{mm}}x_2^{n} - \frac{a_{m3}}{a_{mm}}x_3^{n} - \ldots - \frac{a_{m,m-1}}{a_{mm}}x_{m-1}^{n} + \frac{y_m}{a_{mm}}. \end{cases}$$

Sellisel kujul harilik iteratsioonimeetod ja Seideli meetod koondub, kui maatriks $A$ on domineeriva peadiogonaaliga, st

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|, \quad j \neq i.$$

# Newtoni meetod

Võrrandi $f(x) = 0$ korral oli Newtoni meetodi eeskiri

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Seda meetodit saab üldistada ka mittelineaarsetele võrrandisüsteemidele kujul $F(x) = 0$. Siin $F(X) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$ on vektorfunktsioon ning otsitavate vektor on $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$.
**Newtoni meetodi** algoritm

$$x^n = x^{n-1} - \left[F'(x^{n-1})\right]^{-1} F(x^{n-1}),$$

kus $x^{n-1} = (x_1^{n-1}, x_2^{n-1}, \ldots, x_m^{n-1})$ ja $x^n = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_m^n)$ on kaks järjestikust lähendit.

Newtoni meetod on ruutkoonduvusega, st

$$||x^n - x^*|| \leq C||x^{n-1} - x^*||^2.$$

**Modifitseeritud Newtoni meetod**

$$x^n = x^{n-1} - [F'(x^0)]^{-1} F(x^{n-1})$$

Meetod koondub geomeetrilise progressiooni kiirusega.

# Ekstreemumülesannete lahendamine

Vaatame $m$-muutuja funktsioon $f(x)$, mille argumendiks on $x = (x_1; x_2; \ldots; x_m)$ ning vaja on leida selle funktsiooni maksimum või miinimum. Funktsiooni miinimumi leidmiseks saab kasutada iteratiivseid meetodeid, mille korral liigutakse järk-järgult miinimumpunkti poole funktsiooni kahanemise suunas. Olgu algähend $x^0 = (x_1^0; x_2^0; \ldots; x_m^0) \in R^m$ ja arvutame funktsiooni $f(x)$ gradiendi punktis $x^0$:

$$v^0 = \mathrm{grad} f(x^0) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} f(x^0); \ldots; \frac{\partial}{\partial x_m} f(x^0) \right).$$

Antigradient ehk vektor $-v^0$ määrab suuna, milles funktsioon $f(x)$ kahaneb kõige kiiremini punktist $x^0$ lähtudes. Sellest tulenevalt leiame uue lähendi $x^1$ selliselt, et liigume punktist $x^0$ teatud sammu võrra vektori $-v^0$ suunas, st arvutame $x^1 = x^0 - t_0 v^0$. Arv $t_0$ on sammu pikkus, mis tuleb valida selliselt, et funktsioon $f$ kahaneks, st kehtiks võrratus $f(x^1) < f(x^0)$. Punktist $x^1$ liigume edasi analoogiliselt. Sellist eeskirja kasutavaid meetodeid nimetatakse **gradientmeetoditeks**. Optimaalne sammu pikkus $t_{n-1}$ on selline, mille korral funktsioon $f(x)$ on punktist $x^{n-1}$ lähtuval antigradiendi $-v^{n-1}$ suunal minimaalne. Selleks tuleb valida $t_{n-1}$ nii, et ühe muutuja $t$ funktsioon $f(x^{n-1} - tv^{n-1})$ saavutaks miinimumi punktis $t = t_{n-1}$. Kui gradientmeetodis on sammu pikkus valitud sellise eeskirja kohaselt, siis nimetatakse seda meetodit **kiireima languse meetodiks**. Seega tuleb kiireima languse meetodis $n$-ndal sammul lahendada ühe muutuja funktsiooni miinimumülesanne

$$f(x^{n-1} - t_{n-1}v^{n-1}) = \min_{t\in R} f(x^{n-1} - tv^{n-1}).$$

# Kiireima languse meetod ruutfunktsiooni korral

Olgu $f(x)$ ruutfunktsioon, st

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{m} \beta_i x_i + \gamma,$$

kus $\alpha_{i,j}$, $\beta_i$ ja $\gamma$ on konstandid.
Olgu

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mm} \end{pmatrix}$$

sümmeetriline, st $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$.
Ruutfunktsiooni saab lühemalt kirjutada kujule

$$f(x) = Ax \cdot x + \beta \cdot x + \gamma.$$

Miinimumi leidumiseks

$$Ax \cdot x > 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Leiame osatuletised

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(x) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ Ax \cdot x + \beta \cdot x + \gamma \right] =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{i,j} \frac{\partial x_i}{\partial x_k} x_j + \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{i,j} x_i \frac{\partial x_j}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \frac{\partial x_i}{\partial x_k} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \alpha_{k,j} x_j + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,j} x_i + \beta_k = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_{k,i} + \alpha_{i,k}) x_i + \beta_k.$$

Sümmeetrilisusest $\alpha_{k,i} + \alpha_{i,k} = \alpha_{k,i} + \alpha_{k,i} = 2\alpha_{k,i}$. Seega

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(x) = 2\sum_{i=1}^{m} \alpha_{k,i} x_i + \beta_k.$$

Järelikult

$$\mathrm{grad} f(x) = 2Ax + \beta$$

ning

$$v^{n-1} = \mathrm{grad} f(x^{n-1}) = 2Ax^{n-1} + \beta.$$

Määrame ka sammu pikkuse $t$. Selleks

$$f(x^{n-1} - tv^{n-1}) = A(x^{n-1} - tv^{n-1}) \cdot (x^{n-1} - tv^{n-1}) + \beta \cdot (x^{n-1} - tv^{n-1}) + \gamma.$$

Leiame tuletise muutuja $t$ suhtes

$$\frac{d}{dt}f(x^{n-1}-tv^{n-1}) = -Av^{n-1}\cdot x^{n-1}-Ax^{n-1}\cdot v^{n-1}+2tAv^{n-1}\cdot v^{n-1}-\beta\cdot v^{n-1}.$$

Teadupärast saab seosest $\frac{d}{dt}f(x^{n-1} - tv^{n-1}) = 0$ määrata optimaalse sammu pikkuse

$$t_{n-1} = \frac{Av^{n-1} \cdot x^{n-1} + Ax^{n-1} \cdot v^{n-1} + \beta \cdot v^{n-1}}{2Av^{n-1} \cdot v^{n-1}}.$$