Funktsioonide lähendamine

Funktsiooni lähendamine ehk interpoleerimine on funktsiooni jätkamine.

Olgu antud lõigul $[a, b]$ $n+1$ punkti $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Selliseid punkte nimetatakse interpolatsioonisõlmedeks. Olgu samas teada ka funktsiooni $f(x)$ väärtused neis sõlmedes $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Kui funktsiooni $f(x)$ väärtused väljaspool sõlmi pole teada, saabki rääkida interpolatsiooniülesandest: leida mingi funktsioon $\Phi(x)$ nii, et kehtiks tingimused

$$\Phi(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Selliseid tingimusi nimetatakse interpolatsioonitingimusteks.

Funktsiooni $\Phi(x)$ nimetatakse interpolandiks.

Lagrange'i interpolatsioonipolünoom

Olgu $\Phi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n$ ($n-$astme polünoom), kus c_j ($j = 0, 1, \ldots, n$) on kordajad.
Teoreem. Leidub parajasti üks ülimalt $n-$astme polünoom

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^{n} L_{n,i}(x) f(x_i),$$

mis rahuldab interpolatsioonitingimusi ja kus

$$L_{n,i}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}.$$

Sellist polünoomi esitatakse Lagrange'i interpolatsioonipolünoomiks.
Ühtlase võrgu korral kehtib Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi jaoks hinnang

$$|f(x) - \Phi(x)| \leq |f^{(n+1)}(x)| h^{n+1},$$

kus $h = x_j - x_{j-1}$ on võrgu samm.

Funktsiooni $f(x)$ esimest järku diferentssuhteks nimetatakse suurust

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}.$$

Funktsiooni $f(x)$ teist järku diferentssuhteks nimetatakse suurust

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_j, x_k) - f(x_i, x_j)}{x_k - x_i}.$$

Funktsiooni $f(x)$ $m-$järku diferentssuhteks nimetatakse suurust, mis avaldub $m-1$-järku diferentssuhete kaudu

$$f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m}) = \frac{f(x_{i+1}, \dots, x_{i+m}) - f(x_i, \dots, x_{i+m-1})}{x_{i+m} - x_i}.$$

Polünoomi

$$\Phi(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) +$$

$$+ \dots + f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

nimetatakse Newtoni interpolatsioonipolünoomiks.