

Lineaarsete võrrandisüsteemide täpne lahendamine

Vaatleme lineaarset võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = y_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mm}x_m = y_m. \end{cases}$$

Sama süsteemi saab üles kirjutada ka maatrikskujul $Ax = y$, kus

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Süsteemi lahendamiseks saab kasutada Crameri valemeid, kuid see on küllalt töömahukas ($m+1$ determinanti). Samuti saab süsteemi lahendada Gaussi meetodiga (lahendamiseks kulub suurusjärku $m^3 + m^2$ tehet).

Lineaarseid süsteeme saab lahendada ka **LU-dekompositsiooniga** (*LU-lahutus*). Osutub, et maatriksit A on võimalik lahutada kahe maatriksi korrutiseks $A = LU$,

$$\text{kus } L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{m1} & l_{m2} & \dots & l_{mm} \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1m} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{mm} \end{pmatrix} \quad \text{Kasutades}$$

dekompositsiooni $A = LU$ saab süsteemi $Ax = y$ lahendamise taandada kahe järjestikuse kolmnurkse süsteemi lahendamisele. Olgu $u_{ii} = 1$, siis $l_{i1} = a_{i1}$,

$$u_{1k} = \frac{a_{1k}}{l_{11}}, \quad l_{ik} = a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij}u_{jk} \quad (i \geq k), \quad u_{ik} = \frac{1}{l_{ii}} \left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}u_{jk} \right) \quad (i < k).$$

LU-dekompositsioon on kasulik, kui on vaja lahendada süsteeme ühe ja sama maatriksiga A , kuid erinevate vabaliikmetega y .

Võrrandisüsteemide ligikaudne lahendamine

Vaatleme mittelineaarset võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} f_1(x_1; x_2; \dots; x_m) = 0 \\ f_2(x_1; x_2; \dots; x_m) = 0 \\ \dots \\ f_m(x_1; x_2; \dots; x_m) = 0 \end{cases}$$

kus f_1, \dots, f_m on funktsioonid. Olgu otsitavate vektor $x = (x_1; x_2; \dots; x_m)$. Võrrandisüsteemi vasakust poolest saab moodustada vektori

$F(x) = (f_1(x); f_2(x); \dots; f_m(x))$. Vektor $F(x)$ sõltub vektorist x . Seega on suurus

F vektorfunktsioon ning süsteemi saab kirja panna vektorvõrrandiga $F(x) = 0$. Hariliku iteratsioonimeetodi saamiseks on vaja süsteem $F(x) = 0$ viia kujule $x = G(x)$, kus $G(x) = (g_1(x); g_2(x); \dots; g_m(x))$. Eeskiri n -nda lähendi arvutamiseks on siis

$$x^n = G(x^{n-1}).$$

Seideli iteratsioonimeetodiga saab n -nda lähendi leida

$$\begin{cases} x_1^n = g_1(x_1^{n-1}; x_2^{n-1}; x_3^{n-1}; \dots; x_{m-1}^{n-1}; x_m^{n-1}) \\ x_2^n = g_2(x_1^n; x_2^{n-1}; x_3^{n-1}; \dots; x_{m-1}^{n-1}; x_m^{n-1}) \\ x_3^n = g_3(x_1^n; x_2^n; x_3^{n-1}; \dots; x_{m-1}^{n-1}; x_m^{n-1}) \\ \dots \\ x_m^n = g_m(x_1^n; x_2^n; \dots; x_{m-1}^n; x_m^{n-1}). \end{cases}$$

Teoreem Leidugu süsteemi $F(x) = 0$ lahendit x^* sisaldav kera B , milles on täidetud võrratus $\|G'(x)\| \leq q < 1$. Peale selle eeldame, et vektorfunktsioon $G(x)$ ei vii kerast B välja, st iga $x \in B$ korral $G(x) \in B$. Olgu algühend x^0 valitud hulgast B , siis koondub nii hariliku kui ka Seideli iteratsioonimeetodiga arvutatud lähendite jada x^n täpseks lahendiks x^* . Seejuures kehtib veahinnang

$$\|x^n - x^*\| \leq \frac{q^n}{1 - q} \|x^1 - x^0\|.$$

Võrrandisüsteemide lahendamiseks saab kasutada ka **Newtoni meetodit**. Newtoni meetodi algoritm on järgmine:

$$x^n = x^{n-1} - [F'(x^{n-1})]^{-1} F(x^{n-1}),$$

kus $x^{n-1} = (x_1^{n-1}; x_2^{n-1}; \dots; x_m^{n-1})$ ja $x^n = (x_1^n; x_2^n; \dots; x_m^n)$ on kaks järjestikust lähendit. Seoses olev suurus $[F'(x^{n-1})]^{-1}$ on vektorfunktsiooni $F(x)$ Jacobi maatriksi pöördmaatriks.

Modifitseeritud Newtoni meetod

$$x^n = x^{n-1} - [F'(x^0)]^{-1} F(x^{n-1})$$

koondub geomeetrilise progressiooni kiirusega.

Ekstreemumülesannete lahendamine

Vaatame m -muutuja funktsioon $f(x)$, mille argumendiks on $x = (x_1; x_2; \dots; x_m)$ ning vaja on leida selle funktsiooni maksimum või miinimum.

Gradientmeetodid. Kiireima languse meetod.

Funktsiooni miinimumi leidmiseks saab kasutada iteratiivseid meetodeid, mille korral liigutakse järk-järgult miinimumpunkti poole funktsiooni kahanemise suunas. Olgu algähend $x^0 = (x_1^0; x_2^0; \dots; x_m^0) \in R^m$ ja arvutame funktsiooni $f(x)$ gradiendi punktis x^0 :

$$v^0 = \text{grad}f(x^0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x^0); \dots; \frac{\partial}{\partial x_m} f(x^0) \right).$$

Antigradiend ehk vektor $-v^0$ määrab suuna, milles funktsioon $f(x)$ kahaneb kõige kiiremini punktist x^0 lähtudes. Sellest tulenevalt leiame uue lähendi x^1 selliselt, et liigume punktist x^0 teatud sammu võrra vektori $-v^0$ suunas, st arvutame $x^1 = x^0 - t_0 v^0$. Arv t_0 on sammu pikkus, mis tuleb valida selliselt, et funktsioon f kahaneks, st kehtiks v orratu $f(x^1) < f(x^0)$. Punktist x^1 liigume edasi analoogiliselt. Sellist eeskirja kasutavaid meetodeid nim **gradientmeetoditeks**. Optimaalne sammu pikkus t_{n-1} on selline, mille korral funktsioon $f(x)$ on punktist x^{n-1} lähtuval antigradiendi $-v^{n-1}$ suunal minimaalne. Selleks tuleb valida t_{n-1} nii, et ühe muutuja t funktsioon $f(x^{n-1} - tv^{n-1})$ saavutaks miinimumi punktis $t = t_{n-1}$. Kui gradientmeetodis on sammu pikkus valitud sellise eeskirja kohaselt, siis nimetatakse seda meetodit **kiireima languse meetodiks**. Seega tuleb kiireima languse meetodis n -ndal sammul lahendada ühe muutuja funktsiooni miinimumülesanne

$$f(x^{n-1} - t_{n-1}v^{n-1}) = \min_{t \in R} f(x^{n-1} - tv^{n-1}).$$