Võrrandite lahendamine

Vaatame võrrandite

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

lahendamist, $f(x)$ on ühemuutuja funktsioon.
Definitsioon: Võrrandit $f(x) = 0$ nimetatakse algebraliseks võrrandiks, kui $f(x)$ on algebraline avaldis (st arvud, tähed on omavahel seotud liitmise, lahutamise, korrutamise, jagamise, täisarvulise astendamise ja juurimise abil).
Definitsioon: Võrrandit $f(x) = 0$ nimetatakse transtsendentseks võrrandiks, kui $f(x)$ sisaldab transtsendentseid funktsioone (st eksponent- või logaritmfunktsioone, trigonomeetrilisi funktsioone ja nende pöördfunktsioone).
Definitsioon: Kaht võrrandit nimetatakse samaväärseteks, kui esimese võrrandi iga lahend osutub teise võrrandi lahendiks ja vastupidi: teise võrrandi iga lahend on esimese võrrandi lahendiks.
Definitsioon: Arvu x^* nimetatakse võrrandi $f(x) = 0$ lahendiks (funktsiooni $f(x)$ nullkohaks), kui

$$f(x^*) \equiv 0.$$

Definitsioon: Arvu x^* nimetatakse võrrandi $f(x) = 0$ $k-$kordseks lahendiks, kui

$$f(x^*) = f'(x^*) = \ldots = f^{(k-1)}(x^*) = 0,$$
$$f^{(k)}(x^*) \neq 0.$$

Enamus võrrandi $f(x) = 0$ ligikaudsetest lahendamismeetoditest on nn iteratsioonimeetodid. Põhimõtteliselt võib iteratsioonimeetodi jagada kaheks osaks:
1) leitakse alglähend x_0, milleks on mingi otsitavale lahendile küllalt lähedal paiknev arv (mitmesammulise meetodi puhul läheb vaja mitut alglähendit).
2) täpsustatakse alglähendit nõutava täpsuseni.
Kui lähendi x_n arvutamiseks kasutatakse ainult eelmist lähendit x_{n-1}, on tegu ühesammulise meetodiga. Kui aga x_n arvutamiseks kasutatakse mitut eelnevat lähendit $x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}$, kus $k > 1$, siis on tegu mitmesammulise meetodiga.
Alglähendi leidmine Alglähendi(te) leidmiseks puuduvad täpsed eeskirjad.

Harilik iteratsioonimeetod

Hariliku iteratsioonimeetodi rakendamiseks tuleb võrrand $f(x) = 0$ teisendada kujule

$$x = g(x), \tag{2}$$

kus $g(x)$ on mingi ühe muutuja funktsioon.
Hariliku iteratsioonimeetodi korral arvutatakse lähendid järgmise eeskirja alusel

$$x_n = g(x_{n-1}), \tag{3}$$

st $x_1 = g(x_0),\ x_2 = g(x_1)$ jne.
Uurime meetodi viga. Olgu x^* võrrandi (2) täpne lahend, st $x^* = g(x^*)$. Lähendi x_n tõeline viga avaldub vahena $x_n - x^*$. Vea käitumise analüüsimiseks peaksime hindama suurust $\mid x_n - x^* \mid$. Kui $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \mid x_n - x^* \mid = 0$, siis koondub lähend x_n täpseks lahendiks x^*, st $x_n \longrightarrow x^*$. Osutub, et piisav tingimuseks sellise koondumise jaoks on

$$\mid g'(x) \mid \leq q < 1. \tag{4}$$

Kehtib järgmine teoreem.
Teoreem: Leidugu võrrandi (2) lahendit x^* sisaldav vahemik (a, b), milles on täidetud võrratus (4). Olgu funktsioon $g(x)$ selline, et $\forall x \in (a, b)$ korral $g(x) \in (a, b)$. Olgu $x_0 \in (a, b)$. Siis koondub hariliku iteratsioonimeetodeiga arvutatud lähendite jada x_n täpseks lahendiks x^*. Lisaks kehtib veahinnang

$$\mid x_n - x^* \mid \leq \frac{q^n}{1-q} \mid x_1 - x_0 \mid . \tag{5}$$

Aitkeni võte koondumise kiirendamiseks

Kolme järjestikust lähendit x_{n-2}, x_{n-1}, x_n kasutades saab leida

$$\overline{x_n} = \frac{x_{n-2}x_n - x_{n-1}^2}{x_{n-2} + x_n - 2x_{n-1}},$$

kus $\overline{x_n}$ on viimase lähendi parandus. Leitud suuruse abil saab leida $x_{n+1} = g(\overline{x_n})$.

Newtoni meetod

Vaatame võrrandit kujul (2). Hariliku iteratsioonimeetodi eeskirja $x_n = g(x_n - 1)$ saab teisendada kujule

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Viimast arvutuseeskirja nimetatakse Newtoni meetodiks. Kehtib hinnang

$$|x_n - x^*| \leq \gamma |x_{n-1} - x^*|^2,$$

kus γ on konstant.

Newtoni meetodit saab modifitseerida (modifitseeritud Newtoni meetod)

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_0)}.$$

Lõikajate ehk kõõlude meetod

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})} f(x_{n-1}).$$

Kehtib hinnang

$$|x_n - x^*| \le \beta |x_{n-1} - x^*|^{1,618},$$

kus $\beta > 0$.