

9. HDV Cauchy ülesannete ligikaudne lahendamine

Käesolevas peatükis vaatleme ligikaudseid meetodeid 1. järku harilike diferentsiaalvõrrandite (HDV) Cauchy ülesannete lahendamiseks.

1. järku normaalkujulise HDV Cauchy ülesanne on järgmine:

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad u(t_0) = u_0, \quad (8.1)$$

kus t_0 ja u_0 on etteantud arvud ja $f(t, u)$ on mingi kahemuutuja funktsioon. Enamik ligikaudseid meetodeid ülesande (8.1) lahendamiseks on üles ehitatud järgmisel põhimõttel. Fikseeritakse mingid sõlmed

$$t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots$$

ja otsitakse ülesande lahendi u lähisväärtusi nendes sõlmedes, st arve

$$u_1, u_2, u_3, \dots$$

nii, et $u_i \approx u(t_i)$. Võib liikuda ka punktist t_0 negatiivses suunas, st fikseerida sõlmed $t_0 > t_1 > t_2 > t_3 > \dots$ ja määrata $u_i \approx u(t_i)$. Viimast juhtu me eraldi käsitlema ei hakka. Negatiivses suunas antud ülesande saab lihtsa muutuja vahetusega teisendada positiivses suunas antud ülesandeks.

Üldiselt toimub suuruste u_i arvutamine rekursiivselt, st u_{i+1} arvutatakse eelnevate väärtuste u_i, u_{i-1}, \dots põhjal. Siinkohal võib meetodid jagada kaheks. *Ühesammuliste* meetodite puhul kasutatakse u_{i+1} arvutamiseks ainult eelnevat väärtust u_i . *Mitmesammuliste* meetodite puhul kasutatakse u_{i+1} arvutamiseks väärtusi $u_i, u_{i-1}, \dots, u_{i-k+1}$, kus $k > 1$ (k on meetodi samm). Kuna alguses on teada ainult u_0 , tuleb k -sammulise meetodi algväärtuste u_1, \dots, u_{k-1} leidmiseks alguses kasutada ühesammulist või k -st väksema sammuga meetodit.

Järgnevates alampeatükkides eeldame lihtsuse mõttes, et sõlmed on võrdsete vahedega, st $t_i - t_{i-1} = h$, kus $h > 0$.

9.1. Euleri meetod

Kirjutame võrrandi (8.1) üles punktis t_i , st

$$u'(t_i) = f(t_i, u(t_i))$$

ja asendame seal esineva tuletise diferentsvalemiga sammuga ette, st

$$u'(t_i) \approx \frac{1}{h}(u(t_{i+1}) - u(t_i))$$

(valem (6.1)). Saame

$$\frac{1}{h}(u(t_{i+1}) - u(t_i)) \approx f(t_i, u(t_i)).$$

Siit avaldame $u(t_{i+1})$:

$$u(t_{i+1}) \approx u(t_i) + hf(t_i, u(t_i)). \quad (8.2)$$

Saame järgmise seose otsitava lahendi ligikaudsete väärtuste jaoks:

$$u_{i+1} = u_i + hf(t_i, u_i). \quad (8.3)$$

Tegemist on ühesammulise meetodiga, mida tuntakse *Euleri meetodi* nime all.

Euleri meetod on 1. järku täpsusega. Absoluutse vea hinnang punktis t_i on järgmine:

$$|u_i - u(t_i)| \leq Ch,$$

kus C on konstant.

9.2. Trapetsvalemi meetod. Prognoosi-korrektsooniskeem. 2. järku Runge-Kutta meetod

Integreerime diferentsiaalvõrrandit

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

lõigul $[t_i, t_{i+1}]$:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} u'(t) dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, u(t)) dt.$$

Newton-Leibnitzi valemi põhjal kehtib $\int_{t_i}^{t_{i+1}} u'(t) dt = u(t_{i+1}) - u(t_i)$. Järelikult

$$u(t_{i+1}) = u(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, u(t)) dt. \quad (8.4)$$

Kasutame selles võrrandis sisalduva integraali jaoks trapetsvalemit (7.10) kahe sõlme t_i ja t_{i+1} :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, u(t)) dt \approx \frac{h}{2} [f(t_i, u(t_i)) + f(t_{i+1}, u(t_{i+1}))]. \quad (8.5)$$

Asendades integraali $\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, u(t)) dt$ valemi (8.5) põhjal avaldisse (8.4), saame järgmise võrduse:

$$u(t_{i+1}) \approx u(t_i) + \frac{h}{2} f(t_i, u(t_i)) + \frac{h}{2} f(t_{i+1}, u(t_{i+1})). \quad (8.6)$$

Seega tekib järgmine valem lahendi ligikaudsete väärtuste jaoks:

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2} f(t_i, u_i) + \frac{h}{2} f(t_{i+1}, u_{i+1}). \quad (8.7)$$

See on nn *trapetsvalemi meetod*.

Trapetsvalemi meetod on 2. järku täpsusega, st absoluutse vea hinnang punktis t_i on järgmine:

$$|u_i - u(t_i)| \leq Ch^2.$$

Tegemist on ühesammulise meetodiga, mis on ilmutamata. Suurus u_{i+1} esineb lisaks vasakule poolele ka paremal pool funktsiooni f all. Seega tuleb u_{i+1} leidmiseks lahendada võrrand. Võrrandi lahendamine igal meetodi sammul muudab selle meetodi töömahukaks.

Trapetsvalemi meetodi saab muuta ilmutatuks kasutades nn *prognoosi-korrektsooniskeemi*. Selle põhimõte on järgmine. Esmalt arvutame Euleri meetodit kasutades suuruse u_{i+1} jaoks esialgse lähendi (*prognoosi*)

$$\bar{u}_{i+1} = u_i + hf(t_i, u_i). \quad (8.8)$$

Seejärel asendame \bar{u}_{i+1} võrrandi (8.7) paremasse poolde funktsiooni f alla:

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}f(t_i, u_i) + \frac{h}{2}f(t_{i+1}, \bar{u}_{i+1}). \quad (8.9)$$

Valemist (8.9) arvutame u_{i+1} täpsustatud väärtuse (*korrektsoon*). Seega koosneb prognoosi-korrektsooniskeemi iga samm kahest alamsammust. Meetod on teist järku täpsusega nii nagu trapetsvalemi meetodki.

Prognoosi-korrektsoonimeetodi kaks alamsammu saab väga lihtsalt kokku võtta üheks sammuks. Selleks asendame \bar{u}_{i+1} (8.8) põhjal valemisse (8.9). Saame järgmise ühesammulise meetodi:

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}f(t_i, u_i) + \frac{h}{2}f\left(t_{i+1}, u_i + hf(t_i, u_i)\right). \quad (8.10)$$

Tegemist on teist järku *Runge-Kutta meetodiga*.

Runge-Kutta meetodeid on palju ja nad on praktikas väga populaarsed. Olgu siinkohal veel näiteks toodud üks väga sageli kasutatav 4. järku täpsusega Runge-Kutta meetod:

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u_i + \frac{1}{6}[F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4], \quad \text{kus} \\ F_1 &= hf(t_i, u_i), \\ F_2 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{1}{2}F_1\right), \\ F_3 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{1}{2}F_2\right), \\ F_4 &= hf(t_i + h, u_i + F_3). \end{aligned}$$

9.3. Adamsi meetodid

Üks võimalus mitmesammuliste meetodite tuletamiseks on asendada funktsioon f tema interpolatsioonipolünoomiga ja seejärel integreerida saadud võrrandit. Sellisel viisil saadud meetodeid nimetatakse Adamsi meetoditeks. Vaatleme siinkohal konkreetselt Adams-Bashforthi meetodit.

Tuletame meelde, et võrrandi $u'(t) = f(t, u(t))$ integreerimisel rajades t_i kuni t_{i+1} saime järgmise valemi (vt (8.4)):

$$u(t_{i+1}) = u(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, u(t)) dt. \quad (8.11)$$

Olgu k positiivne täisarv. Konstrueerime ülimalt k -astme polünoomi Φ_k , mis interpoleerib funktsiooni $f(t, u(t))$ sõlmedes t_{i-k}, \dots, t_i , st rahuldab tingimusi

$$\Phi_k(t_{i-j}) = f(t_{i-j}, u(t_{i-j})), \quad j = 0, \dots, k.$$

Kuna interpolatsioonipolünoom lähendab funktsiooni f , siis

$$f(t, u(t)) \approx \Phi_k(t).$$

Järelikult

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, u(t)) dt \approx \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi_k(t) dt. \quad (8.12)$$

Asendades (8.12) valemisse (8.11) saame

$$u(t_{i+1}) \approx u(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi_k(t) dt.$$

Lahendi lähisväärtuste jaoks tuleneb siit järgmine valem:

$$u_{i+1} = u_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi_k(t) dt. \quad (8.13)$$

Tegemist on $k+1$. järku *Adams-Bashforthi meetodiga*.

On võimalik näidata, et selle meetodi algoritmi saab teisendada järgmisele kujule:

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0}^k \gamma_{k,j} f(t_{i-j}, u_{i-j}), \quad (8.14)$$

kus $\gamma_{k,j}$ on teatavad kordajad.

$\gamma_{k,j}$ arvulisi väärtusi võib leida arvutusmeetodite käsiraamatutest. Näiteks olgu siinkohal toodud $\gamma_{k,j}$ väärtused kuni $k=3$ -ni:

k	$\gamma_{k,0} \dots \gamma_{k,k}$
0	h
1	$\frac{3}{2}h \quad -\frac{1}{2}h$
2	$\frac{23}{12}h \quad -\frac{16}{12}h \quad \frac{5}{12}h$
3	$\frac{55}{24}h \quad -\frac{59}{24}h \quad \frac{37}{24}h \quad -\frac{9}{24}h$

Seega 1. järku Adams-Bashforthi meetod on järgmine (langeb kokku Euleri meetodiga):

$$u_{i+1} = u_i + hf(t_i, u_i),$$

teist järku Adams-Bashforthi meetod on järgmine:

$$u_{i+1} = u_i + \frac{3h}{2}f(t_i, u_i) - \frac{h}{2}f(t_{i-1}, u_{i-1})$$

jne.

Meetod on $k + 1$ -sammuline. Tõepoolest, nagu algoritmist (8.14) nähtub, on suuruse u_{i+1} arvutamiseks vaja suurusi $u_i, u_{i-1}, \dots, u_{i-k}$.

Nagu eespool öeldud, on meetod $k + 1$. järku. Seega avaldub absoluutse vea hinnang punktis t_i järgmiselt:

$$|u_i - u(t_i)| \leq Ch^{k+1}.$$